関数

$$y=-3\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+2\cos\theta+1 \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

について以下の問いに答えよ.

(1) $t=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき t の動く範囲を求めよ.
(2) 関数 y を t を用いて表せ.
(3) 関数 y の最大値とそのときの θ の値を求めよ.

(13 東北学院大学 工 2)

【答】

(1) $-1 \leqq t \leqq 2$
(2) $y=-t^2+2t+1$
(3) 最大値 2, $\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi$

【チェック・チェック】

三角関数の最大最小に関する問題で置き換えを利用する典型問題である．

sin，cos の 2 次式は t^2 に置き換えられないかと考える．t による置き換えができれば，y は t の 2 次関数となる．変数を置き換えたときは新しい変数の変域に注意しなければならないが，これは (1) として誘導されている．三角関数の合成は自在にできるようにしておかなければいけない．

【解答】

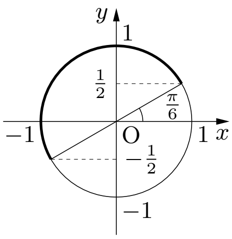
(1)
$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \\
&= 2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= 2\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

⟵ 三角関数の合成は，加法定理を用いる．

θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くから

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{7}{6}\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$$



⟵ 単位円をかいて $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ の値域を調べる．

よって，t の動く範囲は

$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $y = -3\sin^2\theta - \cos^2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta + 2\cos\theta + 1$

$$
\begin{aligned}
&= -(3\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta) \\
&\qquad + 2(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) + 1
\end{aligned}
$$

⟵ y の中の $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を探る．

であり

$$
\begin{aligned}
t^2 &= (\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)^2 \\
&= 3\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

であるから

$$y = \boldsymbol{-t^2 + 2t + 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

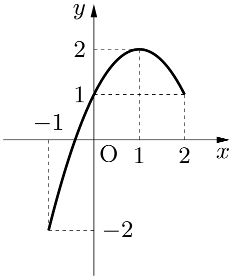
(3) (1), (2) より

$$y = -(t-1)^2 + 2 \quad (-1 \leqq t \leqq 2)$$

であり，このグラフは右図となる．

y は $t = 1$ のとき最大値 **2** をとる．

$\cdots\cdots$(答)



⟵ 2 次関数の最大最小は平方完成して頂点の位置を探る．

このときの θ の値は

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\therefore\quad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

←― sin の三角方程式は単位円周上の点の y 座標に着目する．(1) の単位円を参照.

① より

$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

よって，　$\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi}$　……(答)