座標平面上に，3 直線 $l_1 : y = x + 1$，$l_2 : y = 2x$，$l_3 : y = ax + b$ がある．l_1 と l_2 が l_3 に関して対称であるとき，定数 a と b の値を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(13 北海学園大 工 2(3))

$a = \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$，$b = \dfrac{5-\sqrt{10}}{3}$

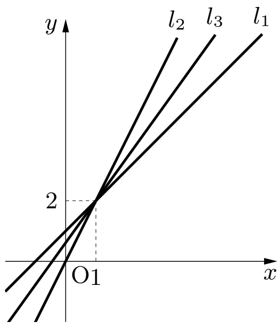
解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

直線 l_3 上の点と l_1, l_2 との関係を考える．または，l_3 は l_1 と l_2 との交点を通るから，あとは方向ベクトルあるいは傾きを求める，など，いろいろな攻め方があります．

【解答】

$$l_1 : y = x + 1$$
$$l_2 : y = 2x$$
$$l_3 : y = ax + b \quad (a > 0)$$



l_3 上の点 $(X,\ Y)$ から，l_1, l_2 までの距離は等しいから

$$\frac{|X - Y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2X - Y|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$
$$\sqrt{5}|X - Y + 1| = \sqrt{2}|2X - Y|$$

←― 点と直線との距離の公式

$a > 0$ より，l_3 は

←― 条件 $a > 0$ がなければ，l_3 は 2 本ある．

$$\begin{cases} y \geqq x + 1 \\ y \leqq 2x \end{cases}$$

←― 絶対値をはずすために l_3 が存在する領域の符号を調べる．

で表される領域にあるから

$$X - Y + 1 \leqq 0 \text{ かつ } 2X - Y \geqq 0$$

であり

$$-\sqrt{5}(X - Y + 1) = \sqrt{2}(2X - Y)$$

←― 絶対値が外れた．

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})Y = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})X + \sqrt{5}$$
$$Y = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}X + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$
$$\therefore \quad Y = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}X + \frac{5 - \sqrt{10}}{3}$$

よって，直線 l_3 の方程式は

$$l_3 : y = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}x + \frac{5 - \sqrt{10}}{3}$$

であり

$$\boldsymbol{a = \frac{1 + \sqrt{10}}{3},\ b = \frac{5 - \sqrt{10}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- l_1 と l_2 の方向ベクトルをそれぞれ

$$\overrightarrow{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ととることができる．$a > 0$ より l_3 の方向ベクトルは $\overrightarrow{l_1}$ と $\overrightarrow{l_2}$ のなす角を 2 等分するから

←― l_3 の方向ベクトルに着目する．

$$\frac{\overrightarrow{l_1}}{|\overrightarrow{l_1}|} + \frac{\overrightarrow{l_2}}{|\overrightarrow{l_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \\ 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

としてよい．l_3 の傾きは

$$\frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$$

l_1 と l_2 の交点の座標は $(1,\ 2)$ であるから，l_3 の方程式は

$$y-2=\frac{1+\sqrt{10}}{3}(x-1)$$
$$\therefore\quad y=\frac{1+\sqrt{10}}{3}x+\frac{5-\sqrt{10}}{3}$$

- l_1 と l_3，l_2 と l_3 のなす角は等しく，この角を θ とすると，l_1 と x 軸の正方向とのなす角は 45° だから

←― l_3 と x 軸の正方向とのなす角に着目する.

$$\begin{cases}\tan(45^\circ+\theta)=a & \cdots\cdots ① \\ \tan(45^\circ+2\theta)=2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

←― ②より $\tan\theta$ を求め，①に代入し a の値を求める.

である.

$$② \iff \frac{\tan 45^\circ+\tan 2\theta}{1-\tan 45^\circ\tan 2\theta}=2$$

←― tan の加法定理

$$\frac{1+\tan 2\theta}{1-\tan 2\theta}=2$$
$$1+\tan 2\theta=2(1-\tan 2\theta)$$
$$\tan 2\theta=\frac{1}{3}$$

さらに，変形し

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1}{3}$$

←― 2 倍角の公式

$$6\tan\theta=1-\tan^2\theta$$
$$\tan^2\theta+6\tan\theta-1=0$$
$$\therefore\quad \tan\theta=-3\pm\sqrt{10}$$

これを，①に代入すると

$$a=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{1+(-3\pm\sqrt{10})}{1-(-3\pm\sqrt{10})}\quad(\text{以下，複号同順})$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{4\mp\sqrt{10}}=\frac{(-2\pm\sqrt{10})(4\pm\sqrt{10})}{(4\mp\sqrt{10})(4\pm\sqrt{10})}$$
$$=\frac{2\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$$

$a>0$ より

$$a=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

←― a の値が絞られた.

l_3 は l_1 と l_2 の交点 $(1,\ 2)$ を通るから l_3 の方程式は

$$y-2=\frac{1+\sqrt{10}}{3}(x-1)$$
$$\therefore\quad y=\frac{1+\sqrt{10}}{3}x+\frac{5-\sqrt{10}}{3}$$