xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．これを証明せよ．

(13 大阪大 文系 1)

略

解答は次のページにあります.

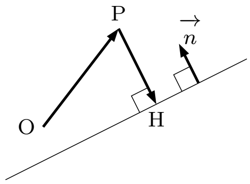
【チェック・チェック】

点と直線との距離を求める重要な公式です．公式は覚えて使うだけでだけでなく，一度は証明もしておきましょう．

【解答】

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から直線 $l : ax+by+c=0$ におろした垂線の足を H とする．

$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は l の法線ベクトルの 1 つであるから



⟵ 直線 l とベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は垂直である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\,\overrightarrow{n}$$
$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

である．H の座標は

$$\mathrm{H}(x_0+ta,\ y_0+tb)$$

であり，H は l 上の点であるから

$$a(x_0+ta)+b(y_0+tb)+c=0$$
$$\therefore\quad t = -\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

よって

$$\mathrm{PH} = |\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = |t||\overrightarrow{n}|$$
$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

⟵ PH はベクトル $t\,\overrightarrow{n}$ の大きさである．

……(証明終わり)

- 直線 l と垂線 $\mathrm{PH} : b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$ を連立して，H の座標

$$\mathrm{H}\left(x_0 - \frac{a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},\ y_0 - \frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)$$

を求め，点 P と直線 l との距離 PH を求めることもできるが，ベクトルを用いた方が表記が簡潔である．

⟵ チェクリピ (80)