$a,\ b,\ c$ は実数とし，$a < b$ とする．平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする．次の問いに答えよ．

(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ.
(2) $b - a \geqq 2$ が成り立つことを示せ.
(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ.

(13 神戸大 文系 2)

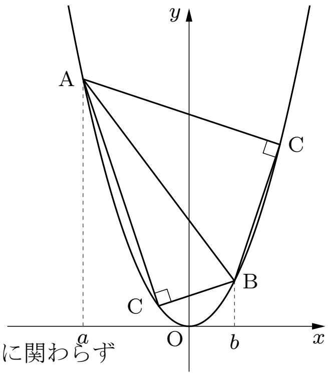
(1) $a = -c - \dfrac{1}{b+c}$
(2) 略
(3) 最小値は 2, $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 0)$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

三角形 ABC において，辺 AB が直角三角形の斜辺となる条件は，CA と CB が直交することです．

【解答】



(1)　A，B，C は相異なる 3 点より，a，b，c は相異なる 3 数である．AB を斜辺とする直角三角形 ABC ができるのは

$$\mathrm{CA} \perp \mathrm{CB} \qquad \cdots\cdots ①$$

のときであり，$a < b$ より右図となる．
直線 CA の傾きは

$$\frac{c^2 - a^2}{c - a} = c + a$$

直線 CB の傾きも，b と c の大小に関わらず

$$\frac{c^2 - b^2}{c - b} = c + b$$

である．①より

$$(c + a)(b + c) = -1 \qquad \cdots\cdots ②$$

← 垂直 $\Longleftrightarrow$ (傾きの積) $= -1$

(右辺) $\neq 0$ より $b + c \neq 0$ であり

$$\boldsymbol{a = -c - \frac{1}{b + c}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　(1) より

$$b - a = b + c + \frac{1}{b + c}$$

②より，$c + a$，$b + c$ は異符号であり，$a < b$ とあわせると

$$c + a < 0 < b + c$$

← 相加平均・相乗平均の不等式を使うための符号確認．

である．相加平均・相乗平均の不等式より

$$b - a \geqq 2\sqrt{(b + c) \cdot \frac{1}{b + c}} = 2$$

等号は $b + c = \dfrac{1}{b + c}$ すなわち $b + c = 1 (> 0)$ のとき成り立つ．

よって，$b - a \geqq 2$ であることが示された．　　$\cdots\cdots$(証明終わり)

(3)　$$\mathrm{AB}^2 = (b - a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = (b - a)^2\{1 + (b + a)^2\}$$

$b - a \geqq 2$ かつ $(b + a)^2 \geqq 0$ より，$\mathrm{AB}^2 \geqq 2^2$ である．

← ここに気がつくか．

等号は

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ b - a = 2 \end{cases} \quad かつ \quad b + a = 0$$

← 両方が成立して等号が成立する．

すなわち

$$a = -1,\ b = 1,\ c = 0$$

のとき成り立つ．

よって，斜辺 AB の長さの

最小値は　**2**　　$\cdots\cdots$(答)

であり，このときの A，B，C の座標はそれぞれ

A(−1，1)，B(1，1)，C(0，0)　　$\cdots\cdots$(答)

である．