次の問いに答えよ．

(1) 2 つの x の 1 次関数 $y=ax+b$ と $y=cx+d$ があるとき，そのグラフが互いに直交する必要十分条件を導け．

(2) 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{O}(-1,\ 1)$，$\mathrm{A}\left(a,\ a^2\right)$ に対して，この放物線上のもう一点 $\mathrm{B}\left(b,\ b^2\right)$ で $\angle\mathrm{OBA}$ が直角になるものが存在する a の条件を与えよ．

(3) 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{O}(-1,\ 1)$，$\mathrm{A}\left(a,\ a^2\right)$ に対して，この放物線上の点をもう一点とり，直角三角形を作ることを考える．直角三角形が 4 つできる a の条件を与えよ．

(13 順天堂大 医 3)

(1) $ac=-1$

(2) $a \leqq -3$ または $1 \leqq a$

(3) $a<-3$ または $1<a<\dfrac{3}{2}$ または $\dfrac{3}{2}<a$

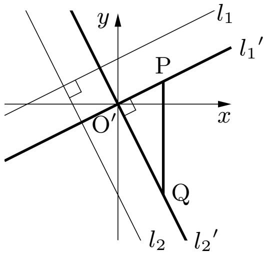
解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1) よく知っている公式ですが，いざ証明となるとどうでしょうか？
(2)，(3) ともに O，A，B のどれもが一致しないという条件がつきます．この処理がこの問題の山場です．

【解答】

(1)
$$l_1 : y = ax + b$$
$$l_2 : y = cx + d$$
とおく．



l_1 と l_2 が直交することは，$l_1{}' : y = ax$ と $l_2{}' : y = cx$ が直交することと同値である．原点を O′ とし，$l_1{}'$, $l_2{}'$ 上にそれぞれ点 $\mathrm{P}(1,\ a)$，$\mathrm{Q}(1,\ c)$ をとると

←― これは教科書流の証明.

$$l_1 \perp l_2 \iff l_1{}' \perp l_2{}' \iff \angle\mathrm{PO'Q}$$
$$\iff \mathrm{O'P}^2 + \mathrm{O'Q}^2 = \mathrm{PQ}^2$$

←― 三平方の定理

$$\iff (1 + a^2) + (1 + c^2) = (a - c)^2$$
$$\iff \boldsymbol{ac = -1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- l_1, l_2 の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{l_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{l_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$ ととることができる．

←― ベクトルの利用

$$l_1 \perp l_2 \iff \overrightarrow{l_1} \cdot \overrightarrow{l_2} = 0 \iff 1 + ac = 0$$

(2) $\angle\mathrm{OBA}$ が直角

$$\iff (\text{直線 OB の傾き}) \times (\text{直線 AB の傾き}) = -1 \cdots\cdots ①$$

3 点 $\mathrm{O}(-1,\ 1)$，$\mathrm{A}\big(a,\ a^2\big)$，$\mathrm{B}\big(b,\ b^2\big)$ はどれも異なるから

$$a \neq -1,\ b \neq -1,\ a \neq b \cdots\cdots (*)$$

である．

←― この条件に注意をはらわなければならない.

直線 OB の傾きは $\dfrac{1 - b^2}{-1 - b} = b - 1$

直線 AB の傾きは $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$

より

$$① \iff (b - 1)(a + b) = -1$$
$$\iff b^2 + (a - 1)b - a + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

b の 2 次方程式①′ が実数解をもつ条件は

$$(①'\text{の判別式}) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

$$(①'\text{の判別式}) = (a - 1)^2 - 4(-a + 1) = (a + 3)(a - 1)$$

より

$$② \iff a \leqq -3 \text{ または } 1 \leqq a \qquad \cdots\cdots ②'$$

$(*)$ より，②′ の範囲から，①′ の解 b が

←― 解の状態に配慮が必要である.

(i) -1 と a である
(ii) 重解 -1 である
(iii) 重解 a である

ような a の値は除かなければならない．$f(b)=b^2+(a-1)b-a+1$ とおく．

$$f(-1)=3-2a$$
$$f(a)=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$f(a)\neq 0$ より，a が解となることはないので，(i)，(iii) は起こり得ない．

> ⟵ 一安心．

また，-1 が解となるのは $a=\dfrac{3}{2}$ のときであり，このとき (①$'$の判別式) >0 である．重解とはならないから，(ii) も起こり得ない．②$'$ であれば $a\neq -1$ を満たすから，求める a の条件は

> ⟵ 結果は，②$'$ になにも影響を与えなかったが，この確認はしなければならない．

$$\boldsymbol{a \leqq -3 \text{ または } 1 \leqq a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) もう 1 点を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とおき，直角となる頂角の位置で場合分けする．

(i) $\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$ の場合；(2) のときであり，直角三角形の個数は①$'$ の実数解 b の個数に一致する．ただし，$b=-1$ が解となる $a=\dfrac{3}{2}$ は除く．

> ⟵ この注意を忘れない．

$$\begin{cases} -3<a<1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a=-3,\ 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a<-3 \text{ または } 1<a \ \left(a\neq\dfrac{3}{2}\right) \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(ii) $\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ の場合；条件は $(*)$ のもとで

$$(a-1)(a+b)=-1$$
$$\therefore\quad (a-1)b+a^2-a+1=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

> ⟵ b についての 1 次以下の方程式

$b=-1$ のとき，③は　$a^2-2a+2=0$
$b=a$ のとき，③は　$2a^2-2a+1=0$
であり，どちらも実数解 a をもたない．
また，③が実数解 b をもつ条件は $a\neq 1$ である．
　したがって，直角三角形の個数は

$$\begin{cases} a=\pm 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a\neq\pm 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

(iii) $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ の場合；条件は $(*)$ のもとで

$$ab=-1 \qquad \cdots\cdots ④$$

> ⟵ b についての 1 次以下の方程式

$b\neq -1$ より，$-a\neq -1$　　$\therefore\ a\neq 1$
$b=a$ のとき，④は $a^2=-1$ であり，実数解 a をもたない．
また，④が実数解 b をもつ条件は $a\neq 0$ である．
　したがって，直角三角形の個数は

$$\begin{cases} a=0,\ \pm 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a\neq 0,\ \pm 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

　よって，直角三角形が 4 つできる a の条件は

> ⟵ (i)，(ii)，(iii) から，直角三角形が $2+1+1=4$(個)

$$\boldsymbol{a<-3 \text{ または } 1<a<\frac{3}{2} \text{ または } \frac{3}{2}<a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$