2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = 5, \quad C_2 : x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

について，次の設問に答えよ．

(1) 2 つの円 C_1，C_2 の共有点を通る直線の y 切片を求めよ．
(2) 2 つの円 C_1，C_2 の共有点と C_2 の中心 O_2 を通る円 C_3 の方程式を求めよ．

(13 奈良教大 3)

(1) $-\dfrac{5}{6}$
(2) $x^2 + y^2 - \dfrac{32}{9}x + \dfrac{8}{3}y - \dfrac{25}{9} = 0$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

2 つの図形 $f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$ が共有点をもつとき

$$kf(x,\ y)+lg(x,\ y)=0 \quad (k,\ l \text{ は実数})$$

は共有点のすべてを通る図形の方程式となっています.

【解答】

(1) $C_1 : x^2+y^2=5$ …… ①

$C_2 : x^2+y^2-8x+6y=0$ …… ②

①，②の辺々をひくと ⟵ 交点は①，②の連立方程式の解である.

$8x-6y=5$ …… ③

③は 2 つの円 C_1，C_2 の共有点を通る直線の方程式である.
よって，y 切片は $x=0$ とおけばよく

$-6y=5 \quad \therefore \quad \boldsymbol{-\frac{5}{6}}$ ……(答)

- 2 円が共有点をもつならば

  $x^2+y^2-5+m(x^2+y^2-8x+6y)=0$ ⟵ 円の束 (そく)

  は共有点のすべてを通る図形の方程式である.
  本問では共有点の存在は認めており，$m=-1$ として得られる x，y の 1 次の関係式は①，②の共有点のすべてを通る直線の方程式である.
  また，2 円の共有点が存在することを要求されたときは

  (半径の差) $\leqq$ (中心間の距離) $\leqq$ (半径の和)

  を示せばよい.
- 直線が x 軸，y 軸とそれぞれ点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ で交わるとき，a をこの直線の x 切片，b をこの直線の y 切片という.
  $a \neq 0$，$b \neq 0$ のとき x 切片が a，y 切片切が b である直線の方程式は

  $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ⟵ 切片方程式

  で表されるから，③は $\frac{x}{\frac{5}{8}}-\frac{y}{\frac{5}{6}}=1$ より y 切片は $-\frac{5}{6}$ である.

(2) ①，③より

$x^2+y^2-5+k(8x-6y-5)=0$ …… ④

とする．④は①，③の共有点のすべてを通る図形であるから，2 つの円 C_1，C_2 の共有点のすべてを通る図形でもある. ⟵ $\{①,\ ②\} \Longleftrightarrow \{①,\ ③\}$
また，$C_2 : (x-4)^2+(y+3)^2=25$ より，円 C_2 の中心 O_2 の座標は $(4,\ -3)$ である．④が O_2 を通るとき

$20+45k=0 \quad \therefore \quad k=-\frac{4}{9}$

このとき④は

$$x^2+y^2-5-\frac{4}{9}(8x-6y-5)=0$$

$$x^2+y^2-\frac{32}{9}x+\frac{8}{3}y-\frac{25}{9}=0$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{16}{9}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}+\left(\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2 \ (>0)$$

⟵ (右辺) >0 を確かめて円であることが示された.

この方程式は円を表している．

よって，求める円 C_3 の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{32}{9}x+\frac{8}{3}y-\frac{25}{9}=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- ①，②より，④を

$$x^2+y^2-5+m(x^2+y^2-8x+6y)=0$$

としてもよいが，④のほうが計算は楽．