座標平面上に，原点 O を中心とする半径 5 の円 C，点 A(0, 7)，点 B(1, 6) が与えられている．点 P$(\alpha,\ \beta)$ を中心とし，2 点 A，B を通る円を $C(\mathrm{P})$ として，以下の問に答えよ．

(1) $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めよ．
(2) 2 円 $C,\ C(\mathrm{P})$ が共有点をもつための条件を α のみを用いて表せ．

(13 防衛医大 2)

$\alpha \leqq 0$ または $120 \leqq \alpha$
解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

2 円の位置関係は「中心間の距離」と「半径の和，差」の大小関係からおさえることができます．あとは計算力の勝負です．

計算が大変だと思ったなら一工夫してみましょう．

【解答】

(1) 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を中心とする円 $C(\mathrm{P})$ の半径を r とすると，$C(\mathrm{P})$ の方程式は

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

である．$C(\mathrm{P})$ は 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 7)$，$\mathrm{B}(1,\ 6)$ を通るから

$$\alpha^2+(7-\beta)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(1-\alpha)^2+(6-\beta)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす．①，②の辺々をひくと

← ①かつ②すなわち，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす P は AB の垂直二等分線上の点である．

$$(2\alpha-1)+(-2\beta+13)=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\alpha-\beta+6=0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 2 円が共有点をもつ条件は

$$(半径の差) \leqq (中心間の距離) \leqq (半径の和) \qquad \cdots\cdots (*)$$

← 2 円の位置関係

である．(1) より $C(\mathrm{P})$ の中心は $(\alpha,\ \alpha+6)$，半径 r は①より

$$r^2=\alpha^2+\{7-(\alpha+6)\}^2=2\alpha^2-2\alpha+1$$

を満たす．円 C は中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，半径 5 の円であるから

$$\begin{aligned}
(*) &\iff |\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}-5| \\
&\qquad \leqq \sqrt{\alpha^2+(\alpha+6)^2} \leqq \sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}+5 \\
&\iff (\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}-5)^2 \\
&\qquad \leqq 2\alpha^2+12\alpha+36 \leqq (\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1}+5)^2 \\
&\iff 2\alpha^2-2\alpha+26-10\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1} \\
&\qquad \leqq 2\alpha^2+12\alpha+36 \\
&\qquad \leqq 2\alpha^2-2\alpha+26+10\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1} \\
&\iff -5\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1} \\
&\qquad \leqq 7\alpha+5 \leqq 5\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1} \\
&\iff |7\alpha+5| \leqq 5\sqrt{2\alpha^2-2\alpha+1} \\
&\iff 49\alpha^2+70\alpha+25 \leqq 25(2\alpha^2-2\alpha+1) \\
&\iff \alpha^2-120\alpha \geqq 0
\end{aligned}$$

← ここから先は同値性に注意をはらって計算する．

よって，求める条件は

$$\boldsymbol{\alpha \leqq 0}\ \textbf{または}\ \boldsymbol{120 \leqq \alpha} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 2 円の方程式は

$$C : x^2+y^2=5^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$C(\mathrm{P}) : (x-\alpha)^2+(y-\alpha-6)^2=2\alpha^2-2\alpha+1 \qquad \cdots\cdots ④$$

である．③，④の辺々をひくと

$$2\alpha x+2(\alpha+6)y-\alpha^2-(\alpha+6)^2=-2\alpha^2+2\alpha+24$$

$$\therefore\quad \alpha x+(\alpha+6)y-7\alpha-30=0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

{③，④} $\iff$ {③，⑤} より

← 加減法の原理

③，④ が共有点をもつ

$\iff$ ③，⑤ が共有点をもつ

$\iff$ (③の中心と直線⑤との距離) $\leqq$ (③の半径)

$$\iff \frac{|-7\alpha-30|}{\sqrt{\alpha^2+(\alpha+6)^2}}\leqq 5$$

$$\iff (7\alpha+30)^2\leqq 25(2\alpha^2+12\alpha+36)$$

$$\iff \alpha^2-120\alpha\geqq 0$$

$\therefore\quad \alpha\leqq 0$ または $120\leqq\alpha$

← 2 円の位置関係を円と直線の位置関係に言い換えた．これにより計算がかなり楽になった．