中心 A(1, 1), 半径 1 の円を C とする．原点を通り円 C と異なる 2 点 P，Q で交わる直線を ℓ とする．P，Q における円 C の 2 本の接線が直交するとき，次の問に答えよ．

(1) △APQ の面積 S を求めよ．
(2) 直線 ℓ の傾きを求めよ．
(3) 2 本の接線の交点 R の座標を求めよ．

(13 早稲田大 社会科学 2)

(1) $\dfrac{1}{2}$
(2) $2 \pm \sqrt{3}$
(3) $\left(\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$ (複号同順)

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

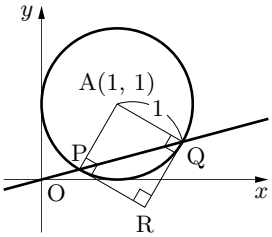
四角形 APRQ の形状が見えれば，あとは頻出テーマを処理するだけです．円と直線に関する総合問題に挑んでみましょう．

【解答】

(1) P，Q における円 C の 2 本の接線の交点は R であり

$$\angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{AQR} = 90^\circ$$
$$\text{かつ } \angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$$

より，四角形 APRQ は一辺の長さが 1 の正方形である．



$$S = \frac{1}{2} \times \mathrm{AP} \times \mathrm{AQ}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ △APQ は直角二等辺三角形である．

(2) 直線 ℓ は y 軸とは一致しないから，直線 ℓ の方程式を $y = mx$ とおくことができる．(1) の考察より，直線 ℓ と円 C の中心 A との距離は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

⟵ 円と直線の位置関係は中心と直線との距離と半径に着目する．

$$\frac{|m \cdot 1 - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

分母を払って

$$\sqrt{2}\,|m - 1| = \sqrt{m^2 + 1}$$

両辺を平方して，整理すると

$$2(m-1)^2 = m^2 + 1$$
$$m^2 - 4m + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\therefore \quad m = \boldsymbol{2 \pm \sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 題意を満たす直線は 2 本存在する．

(3) R は直線 ℓ に関する A の対称点である．R の座標を $(a,\ b)$ とおくと，$m \neq 0$ より $a \neq 1$ であり

$$\begin{cases} \dfrac{b-1}{a-1} \times m = -1 \\ \dfrac{b+1}{2} = m \times \dfrac{a+1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a + mb = m + 1 \\ ma - b = -m + 1 \end{cases}$$

⟵ $\begin{cases} \mathrm{AR} \perp \ell \\ \mathrm{AR} \text{ の中点は } \ell \text{ 上にある} \end{cases}$

$$\therefore \quad a = \frac{-m^2 + 2m + 1}{m^2 + 1}, \quad b = \frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 + 1}$$

①より $m^2 = 4m - 1$ であり，以下，複号同順とすると

⟵ 「次数下げ」して計算を減らす．

$$a = \frac{-(4m-1) + 2m + 1}{4m} = \frac{-m+1}{2m}$$
$$= \frac{-1 \mp \sqrt{3}}{2(2 \pm \sqrt{3})} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$$
$$b = \frac{(4m-1) + 2m - 1}{4m} = \frac{3m-1}{2m}$$
$$= \frac{5 \pm 3\sqrt{3}}{2(2 \pm \sqrt{3})} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

よって，点 R の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}} \right) \ (\text{複号同順}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 線分 PQ と AR の交点を T とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の直線 ℓ に下した正射影ベクトルである．ℓ の方向ベクトルを $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= 2\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{m}}{|\vec{m}|^2}\vec{m} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= 2\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2(1+m)}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

← 正射影ベクトルの公式

①より $m^2 = 4m - 1$ であり，以下，複号同順とすると

← 「次数下げ」して計算を減らす.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \frac{1+m}{2m}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2(2 \pm \sqrt{3})}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \pm \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3 \mp \sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \pm \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \mp \sqrt{3} \\ 3 \pm \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt{3} \\ 1 \pm \sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，点 R の座標は

$$\left(\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2},\ \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{(複号同順)}$$