次の問に答えよ．

(1) 点 P$(-1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2) 点 C$(-1,\ 2)$ を中心とし，直線 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$ に接する円の方程式を求めよ．

(13 静岡文芸大 デザイン 5)

(1) $x=-1,\ 4x+3y-5=0$

(2) $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{32}{5}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

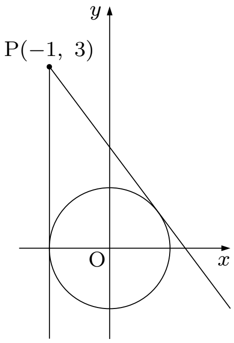
円と直線が接するための条件は

$$(\text{円の中心と直線との距離}) = (\text{半径})$$

が成り立つことです.

【解答】

(1) (i) y 軸と平行な直線について；
点 $(-1,\ 3)$ を通り y 軸と平行な直線 $x=-1$ は円 $x^2+y^2=1$ の接線である.



(ii) y 軸と平行でない直線について；
点 $(-1,\ 3)$ を通り y 軸と平行でない直線 $y=m(x+1)+3$, すなわち $mx-y+m+3=0$ が円 $x^2+y^2=1$ と接する条件は

$$(\text{中心と直線との距離}) = (\text{半径})$$

であるから

$$\frac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \iff (m+3)^2=m^2+1$$

$$\therefore \quad m=-\frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3}x-y+\frac{5}{3}=0 \qquad \therefore \quad 4x+3y-5=0$$

(i), (ii) より, 求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{x=-1,\ 4x+3y-5=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$ax+by=1$$

であり, この接線が点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$ を通る条件は

$$a+3b=1 \qquad \therefore \quad a=3b-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

一方, 点 $(a,\ b)$ は円周上にあるので

$$a^2+b^2=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす. ①を②に代入して

$$(3b-1)^2+b^2=1$$

$$5b^2-3b=0 \qquad \therefore \quad b=0,\ \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad (a,\ b)=(-1,\ 0),\ \left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

よって, 求める直線の方程式は

$$-x=1,\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1$$

$$\therefore \quad x=-1,\ 4x+3y-5=0$$

←― 直線を $y=mx+n$ の形で考えるときは y 軸と平行な直線が除かれていることに注意する.

←― 円と直線との位置関係は「円の中心と直線との距離と半径」を比較すればよい.

←― 接点が与えれたときの円の接線の公式

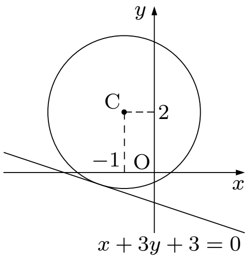
←― 2 つの未知数 $a,\ b$ を決めるには 2 つの等式が必要である.

(2) 求める円の半径 r は，点 $\mathrm{C}(-1,\ 2)$ から直線 $x+3y+3=0$ までの距離であるから

$$r = \frac{|-1+3\cdot 2+3|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{32}{5}}$$



……(答)

⟵ (半径) = (中心と直線との距離)