座標平面上に 2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 2)$ をとる．m を実数とし，直線 $y=mx$ を l とする．以下の問いに答えよ．

(1) l 上の点 P の座標を $(t,\ mt)$ とするとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を $t,\ m$ を用いて表せ.

(2) 点 P が l 上を動くとき，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標を $(X,\ Y)$ とおく．$X,\ Y$ を m で表せ.

(3) m が実数全体を動くとき，$(X,\ Y)$ はある曲線 C 上を動く．C の方程式を求めよ.

(13 中央大 理工 3)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

設問 (2) は軌跡がのる曲線を求めていますが (除外点は考慮しなくてよい)，軌跡そのものを求めることにしましょう．

【解答】

(1) A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 2)$，P$(t,\ \ mt)$ より

$$\begin{aligned}&\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2\\ =&\{(t+1)^2+(mt)^2\}+\{(t-3)^2+(mt-2)^2\}\\ =&\boldsymbol{2(m^2+1)t^2-4(m+1)t+14}\end{aligned}$$

……(答)

⟵ t についての 2 次関数である．

(2) (1) より

$$\begin{aligned}&\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2\\ =&2(m^2+1)\left(t-\frac{m+1}{m^2+1}\right)^2-\frac{2(m+1)^2}{m^2+1}+14\end{aligned}$$

⟵ 平方完成する．

よって，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ が最小になるのは

$$t=\frac{m+1}{m^2+1}$$

⟵ 頂点で最小となる．

のときであるから，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ を最小にする P の座標 $(X,\ Y)$ は

$$\boldsymbol{X=\frac{m+1}{m^2+1},\quad Y=\frac{m(m+1)}{m^2+1}}$$

……(答)

(3) (2) より

$$\begin{cases}X=\dfrac{m+1}{m^2+1}\\ Y=\dfrac{m(m+1)}{m^2+1}\end{cases}\iff\begin{cases}X=\dfrac{m+1}{m^2+1} & \cdots\cdots ①\\ Y=mX & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

{①，②} を満たす実数 m が存在するための X, Y の条件を求める．②をみて

⟵ パラメータ m の存在条件

(i) $X\fallingdotseq 0$ のとき；②は $m=\dfrac{Y}{X}$ である．これを①に代入すると

⟵ ②を m についての方程式とみて，$X \fallingdotseq 0, =0$ の場合分けをする．

$$X=\frac{\dfrac{Y}{X}+1}{\dfrac{Y^2}{X^2}+1}=\frac{XY+X^2}{Y^2+X^2}$$

$$\begin{aligned}&\iff X(X^2+Y^2)=X(Y+X)\\ &\iff Y^2+X^2=Y+X\quad(\because\ X\fallingdotseq 0)\\ &\iff \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ii) $X=0$ のとき；②より $Y=0$，①より $m=-1$

したがって，点 $(0,\ 0)$ は条件を満たす．

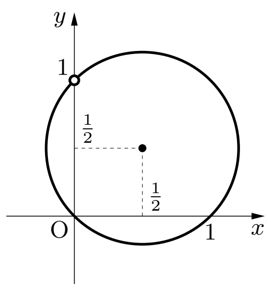
以上 (i)，(ii) より，点 (X,Y) の軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

から，点 $(0,\ 1)$ を除いたものであり，点 $(X,\ Y)$ は円

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}}$$

上を動く．……(答)



⟵ 除外点があることに注意!!