xy 平面上の 3 点 A$(a,\ b)$，B$(-b,\ a)$，C$\left(a^2-b^2,\ 4ab\right)$ を考える．ただし，a, b はそれぞれ $a>0$, $b>0$, $a+b=1$ を満たす任意の実数である．次の問いに答えよ．

(1) a, b が条件を満たしながら動くとき，点 C が描く図形を図で示せ．
(2) $\angle \mathrm{ACB}=\theta$ とおくとき，θ を最小にする a の値を求めよ．
(3) 三角形 ABC の面積を最大にする a の値を求めよ．

(13 名古屋市大 経済 4)

(1) 略
(2) $\dfrac{1}{2}$
(3) $\dfrac{1}{2}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

軌跡の問題は論理が大切です.

「パラメータの存在条件」を正しく扱えるようになりましょう.

【解答】

(1) a, b の条件は

$$a > 0 \cdots\cdots ①,\quad b > 0 \cdots\cdots ②,\quad a + b = 1 \cdots\cdots ③$$

C の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x = a^2 - b^2 \cdots\cdots ④,\quad y = 4ab \cdots\cdots ⑤$$

点 $(x,\ y)$ が C の軌跡上の点であるための条件は，その点を与える実数 a, b が存在すること，すなわち，$\{$①, ②, ③, ④, ⑤$\}$ を満たす実数 a, b が存在することである．したがって，C の軌跡を求めることは $\{$①, ②, ③, ④, ⑤$\}$ を満たす実数 a, b が存在するための x, y の条件を求めることである。

←― この言い回し「パラメータの存在条件」に慣れよう.

a, b の条件を整理すると

$$\{①,\ ②,\ ③,\ ④,\ ⑤\}$$

$$\iff \begin{cases} b = 1 - a & \cdots\cdots ③' \\ a > 0 & \\ 1 - a > 0 & \\ x = a^2 - b^2 = a^2 - (1-a)^2 = 2a - 1 & \\ y = 4ab = 4a(1-a) = -4a^2 + 4a & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 1 - a & \cdots\cdots ③' \\ 0 < a < 1 & \cdots\cdots ⑥ \\ x = 2a - 1 & \cdots\cdots ⑦ \\ y = -4a^2 + 4a & \cdots\cdots ⑧ \end{cases}$$

$\{$⑥, ⑦, ⑧$\}$ を満たす実数 a が存在すれば，③$'$ として実数 b が存在するから，$\{$⑥, ⑦, ⑧$\}$ を満たす実数 a が存在するための x, y の条件を求めれよい．さらに式を変形すると

←― b の存在が保証されている.

$$\{⑥,\ ⑦,\ ⑧\}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{x+1}{2} & \cdots\cdots ⑦' \\ 0 < \dfrac{x+1}{2} < 1 & \\ y = -4\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \dfrac{x+1}{2} = -x^2 + 1 & \end{cases}$$

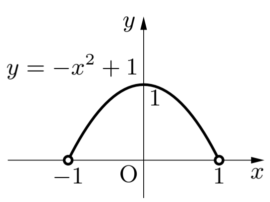
$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{x+1}{2} & \cdots\cdots ⑦' \\ -1 < x < 1 & \cdots\cdots ⑨ \\ y = -x^2 + 1 & \cdots\cdots ⑩ \end{cases}$$

$\{$⑨, ⑩$\}$ を満たす x, y であれば実数⑦$'$ として実数 a が存在するから，求める x, y の条件は $\{$⑨, ⑩$\}$，すなわち

←― a の存在も保証された.

$$y = -x^2 + 1 \text{ かつ } -1 < x < 1$$

である.



よって，点 C が描く図形は**右図**のようになる. ……(答)

(2) ③′ を用いて，3 点 A，B，C の座標を a で表すと

$$\mathrm{A}(a,\ 1-a),\quad \mathrm{B}(a-1,\ a),\quad \mathrm{C}(2a-1,\ -4a^2+4a)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a-1 \\ -4a^2+4a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+1 \\ 4a^2-5a+1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\begin{pmatrix} a-1 \\ a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a-1 \\ -4a^2+4a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ 4a^2-3a \end{pmatrix}$$

⟵ $\theta=\angle\mathrm{ACB}$ を考えるので，ベクトルの始点は C にとる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=(-a+1)(-a)+(4a^2-5a+1)(4a^2-3a)\\&=16a^4-32a^3+20a^2-4a\\&=4a(a-1)(2a-1)^2\end{aligned}$$

$\theta=\angle\mathrm{ACB}$ より

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}=\frac{4a(a-1)(2a-1)^2}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}$$

$0<a<1$ より $\cos\theta\leqq 0$ となるから，θ は $\cos\theta=0$ のとき最小となる．

このときの a の値は $a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ である．　……(答)

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|(-a+1)(4a^2-3a)-(-a)(4a^2-5a+1)|\\&=\frac{1}{2}|2a^2-2a|=|a(a-1)|=-a^2+a\\&=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

⟵ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

よって，S を最大にする a の値は $a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ である．　……(答)