a を正の定数とする．次の方程式で表される円 C_1 と放物線 C_2 がある．

$$C_1 : (x-2a)^2 + y^2 = a^2, \quad C_2 : y = \frac{2}{5a^2}x^2 + 1$$

C_1 の中心を P，C_2 の頂点を Q とし，

$$\mathrm{PR}^2 - \mathrm{QR}^2 = a^2 - 1$$

を満たす点 R の軌跡を C_3 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C_3 を表す方程式を求めよ．
(2) C_1 と C_3 が共有点をもつとき，C_2 と C_3 は共有点をもたないことを示せ．

(13 和歌山大 教育・経済・観光・システム工 3)

(1) $4ax - 2y - 3a^2 = 0$
(2) 略
解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

軌跡の問題としては初級編です．R の座標を $(x,\ y)$ とし，与えらた条件式に P，Q の座標を代入すると軌跡の方程式を得ることができます．

【解答】

(1) 円 $C_1 : (x-2a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ の中心 P の座標は　　$\longleftarrow$ 円の標準形

$$\mathrm{P}(2a,\ 0)$$

であり，放物線 $C_2 : y=\dfrac{2}{5a^2}x^2+1$ の頂点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}(0,\ 1)$$

である．点 R の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2=a^2-1$$

$\longleftarrow$ 与えられた条件

$$\{(x-2a)^2+y^2\}-\{x^2+(y-1)^2\}=a^2-1$$

$$\boldsymbol{4ax-2y-3a^2=0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

これが点 R の軌跡 C_3 を表す方程式である．

(2) 円 C_1 と直線 C_3 が共有点をもつとき

中心 P と直線 C_3 との距離 $\leqq$ 半径

$\longleftarrow$ 円と直線が共有点をもつための条件

$$\iff \frac{|8a^2-3a^2|}{\sqrt{16a^2+4}} \leqq a$$

$$\iff 5a^2 \leqq a\sqrt{16a^2+4}$$

$$\iff 25a^2 \leqq 16a^2+4 \quad (\because\ a>0)$$

$$\iff 0<a^2 \leqq \frac{4}{9} \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，C_1，C_2 を連立すると

$$2ax-\frac{3}{2}a^2=\frac{2}{5a^2}x^2+1$$

$$2x^2-10a^3x+\frac{15}{2}a^4+5a^2=0$$

①のもとで，この 2 次方程式の判別式 D の符号を調べる．

$\longleftarrow$ C_2 と C_3 は共有点をもたない条件は，$D<0$ である．

$$\frac{D}{4}=25a^6-15a^4-10a^2=5a^2(5a^4-3a^2-2)$$

$$=5a^2(a^2-1)(5a^2+2)<0 \quad (\because\ ①)$$

よって，C_2 と C_3 は共有点をもたない．　$\cdots\cdots$(証明終わり)