xy 平面上に 3 点 A$(-3,\ 0)$，B$(0,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ $(c>0)$ がある．

(1) PA : PB $=2:1$ となる点 P は，点 $\left(\boxed{(ア)},\ \boxed{(イ)}\right)$ を中心とする半径 $\boxed{(ウ)}$ の円を描く．

(2) PA : PB : PC $=4:2:1$ となるような点 P が存在するのは $\boxed{(エ)} \leqq c \leqq \boxed{(オ)}$ のときである．

(13 愛知学院大 薬・歯)

【答】

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
1	0	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$

【解答】

(1) $$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1 \iff 4\mathrm{PB}^2=\mathrm{PA}^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

P$(x,\ y)$ とおくと，A$(-3,\ 0)$，B$(0,\ 0)$ より

$$① \iff 4(x^2+y^2)=(x+3)^2+y^2$$

式を整理すると

$$\begin{aligned} &3x^2-6x+3y^2=9 \\ &x^2-2x+y^2=3 \qquad \cdots\cdots ①' \\ \therefore\ &(x-1)^2+y^2=4 \end{aligned}$$

よって，P は点 **(1, 0)** を中心とする半径 **2** の円を描く． ……(答)

(2) 与えらた条件は

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}:\mathrm{PC}=4:2:1 \iff \begin{cases} \mathrm{PA}:\mathrm{PB}=4:2=2:1 \\ \mathrm{PB}:\mathrm{PC}=2:1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4\mathrm{PB}^2=\mathrm{PA}^2 & \cdots\cdots ① \\ 4\mathrm{PC}^2=\mathrm{PB}^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

P$(x,\ y)$ とおくと，B$(0,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ より

$$② \iff 4\{(x-c)^2+y^2\}=x^2+y^2$$

式を整理すると

$$\begin{aligned} &3x^2-8cx+3y^2=-4c^2 \\ &x^2-\frac{8}{3}cx+y^2=-\frac{4}{3}c^2 \qquad \cdots\cdots ②' \\ \therefore\ &\left(x-\frac{4}{3}c\right)^2+y^2=\frac{4}{9}c^2 \end{aligned}$$

$c>0$ より，②の軌跡は点 $\left(\frac{4}{3}c,\ 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{2}{3}c$ の円である．

したがって,「①かつ②」を満たす P が存在する条件は，①の軌跡と②の軌跡が共有点をもつことであり，2 つの軌跡がともに円であるから

$$|2\text{ 円の半径の差}| \leqq (2\text{ 円の中心間の距離}) \leqq (2\text{ 円の半径の和})$$

である．すなわち

$$\left|\frac{2}{3}c-2\right| \leqq \left|\frac{4}{3}c-1\right| \leqq \frac{2}{3}c+2$$

$$\iff \begin{cases} \left(\frac{2}{3}c-2\right)^2 \leqq \left(\frac{4}{3}c-1\right)^2 \\ \left(\frac{4}{3}c-1\right)^2 \leqq \left(\frac{2}{3}c+2\right)^2 \end{cases}$$

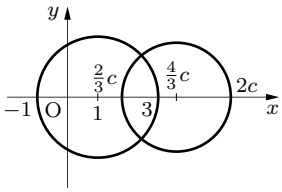
$$\iff \begin{cases} (2c-3)\left(\frac{2}{3}c+1\right) \geqq 0 \\ (2c+1)\left(\frac{2}{3}c-3\right) \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c \leqq -\frac{3}{2} \text{ または } \frac{3}{2} \leqq c \\ -\frac{1}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2} \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{\frac{3}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2}}$　……(答)

- 2 つの円の中心はともに x 軸上にあるから，x 軸との交点に着目すると，2 つの円が共有点をもつ条件は

$$\frac{2}{3}c \leqq 3 \leqq 2c \qquad \therefore \quad \frac{3}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2}$$



- 「①′ かつ②′」を同値変形する．

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2=3 & \cdots\cdots ①' \\ x^2-\frac{8}{3}cx+y^2=-\frac{4}{3}c^2 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-2x+y^2=3 & \cdots\cdots ①' \\ \left(\frac{8}{3}c-2\right)x=\frac{4}{3}c^2+3 & \cdots\cdots ③ \quad (\because\ ①'-②') \end{cases}$$

「①′ かつ②′」を満たす P が存在するということは,「①′ かつ③」を満たす x, y が存在することである．③において，右辺は正であるから $\frac{8}{3}c-2 \neq 0$ であり

$$「①'かつ③」 \iff \begin{cases} (x-1)^2+y^2=4 & \cdots\cdots ①' \\ x=\frac{4c^2+9}{8c-6} & \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

求める条件は，円①′ と直線③′ が共有点をもつことである．この条件は

(円の中心と直線の距離) $\leqq$ (円の半径)

であり

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{4c^2+9}{8c-6}-1\right| \leqq 2 \\
\iff & -2 \leqq \frac{4c^2+9}{8c-6}-1 \leqq 2 \\
\iff & \begin{cases} \dfrac{4c^2+9}{8c-6} \geqq -1 \\ \dfrac{4c^2+9}{8c-6} \leqq 3 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \dfrac{4c^2+8c+3}{8c-6} \geqq 0 \\ \dfrac{4c^2-24c+27}{8c-6} \leqq 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} (4c-3)(2c+3)(2c+1) \geqq 0 \\ (4c-3)(2c-3)(2c-9) \leqq 0 \\ 4c-3 \neq 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \leqq c \leqq -\dfrac{1}{2} \text{ または } \dfrac{3}{4} < c \\ c < \dfrac{3}{4} \text{ または } \dfrac{3}{2} \leqq c \leqq \dfrac{9}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$c > 0$ もあわせると，求める範囲は

$$\frac{3}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2}$$

次のように変形することもできる．

$$
\text{「①}'\text{かつ③」} \iff \begin{cases} y^2 = -(x+1)(x-3) & \cdots\cdots \text{①}'' \\ \left(\dfrac{8}{3}c-2\right)x - \dfrac{4}{3}c^2 - 3 = 0 & \cdots\cdots \text{③}' \end{cases}
$$

「①かつ②」を満たす P が存在するということは,「①$''$ かつ③$'$」を満たす x, y が存在することである．①$''$ を満たす実数 y が存在する条件は

$$-(x+1)(x-3) \geqq 0 \qquad \therefore \quad -1 \leqq x \leqq 3 \qquad \cdots\cdots \text{④}$$

③$'$ の左辺を $f(x)$ とおくと,「④かつ③$'$」を満たす x が存在する条件は

$$f(-1)f(3) \leqq 0$$

である．

$$
\begin{aligned}
f(-1)f(3) &= \left(-\frac{4}{3}c^2 - \frac{8}{3}c - 1\right)\left(-\frac{4}{3}c^2 + 8c - 9\right) \\
&= \frac{1}{9}(4c^2+8c+3)(4c^2-24c+27) \\
&= \frac{1}{9}(2c+3)(2c+1)(2c-3)(2c-9)
\end{aligned}
$$

$a > 0$ もあわせると，求める範囲は

$$\frac{3}{2} \leqq c \leqq \frac{9}{2}$$