

円 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ と、直線 $y = \frac{1}{2}x$ の 2 つの交点と円上の任意の点によりできる三角形の重心の軌跡を求めなさい。

(13 愛知学院大 薬・歯 3)

中心 $(\frac{17}{5}, \frac{11}{5})$ 、半径 1 の円から 2 点 $(\frac{14}{5}, \frac{7}{5})$ 、 $(\frac{22}{5}, \frac{11}{5})$ を除いた図形
解答は次のページにあります。

【チェック・チェック】

まずは円周上の動点と重心との関係式をつくります。この後は、重心の軌跡を求めるのが目標なので、円周上の動点の条件が重心に反映するように式を変形します。また、動点が交点の一方と一致するときは三角形とならぬので重心も存在しないことに注意しましょう。

【解答】

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{1}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

円①と直線②の交点は、①、②を連立して

$$(x-3)^2 + \left(\frac{x}{2}-3\right)^2 = 9$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$(5x-6)(x-6) = 0 \quad \therefore x = \frac{6}{5}, 6$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right), (6, 3)$$

2つの交点を $A\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $B(6, 3)$ とする。A, B 以外の円周上の点を $P(x, y)$ とし、三角形 ABP の重心を $G(X, Y)$ とすると

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP}}{3}$$

$$\vec{OP} = 3\vec{OG} - \vec{OA} - \vec{OB}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3X - \frac{36}{5} \\ 3Y - \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

P は円①上を動くから

$$\left(3X - \frac{36}{5} - 3\right)^2 + \left(3Y - \frac{18}{5} - 3\right)^2 = 9$$

$$\therefore \left(X - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(Y - \frac{11}{5}\right)^2 = 1$$

ただし、P は A, B とは一致しないから

$$\begin{pmatrix} 3X - \frac{36}{5} \\ 3Y - \frac{18}{5} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{22}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

よって、求める軌跡は、

中心 $\left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$, 半径 1 の円から

2点 $\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right), \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$ を除いた図形 ……(答)

である。

← P の条件式に代入しやすいうちに式を変形する。
[チェックリビ 113](#)

← Q の条件式が得られた。

← P が A または B と一致すると 3 点 A, B, P を結んでできる図形は三角形でなくなる(線分となる)。