

媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 4 \cos^2 \theta \\ y = 4 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

の表す円の方程式, および中心の座標と半径を求めよ.

(13 東京都市大 工・知識工 1(3))

$(x - 2)^2 + y^2 = 4,$
中心の座標 $(2, 0)$, 半径 2
解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

媒介変数表示された点 (x, y) の軌跡は、与えられた条件を満たす媒介変数が存在するような点 (x, y) の集合です。

「媒介変数の存在条件」がキーワードですね。

【解答】

与えられた式を変形すると

$$\begin{cases} x = 4 \cos^2 \theta = 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = 2 + 2 \cos 2\theta & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = 4 \cos \theta \sin \theta = 2 \sin 2\theta & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

← 半角の公式

← 2倍角の公式

θ が実数全体を動くときの点 (x, y) の軌跡は、 $\{\textcircled{1}, \textcircled{2}\}$ を満たす実数 θ が存在するような点 (x, y) の集合である。

$$\{\textcircled{1}, \textcircled{2}\} \iff \begin{cases} \cos 2\theta = \frac{x-2}{2} \\ \sin 2\theta = \frac{y}{2} \end{cases}$$

これを満たす実数 θ が存在するための条件は

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

← 三角関数の定義
($\cos \theta, \sin \theta$) は
 $x^2 + y^2 = 1$
上の点である。

であり、求める方程式は

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である。これは中心 $(2, 0)$ 、半径 2 の円を表す。 $\cdots \cdots (\text{答})$

- $\{\textcircled{1}, \textcircled{2}\}$ をベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

← 円のベクトル方程式

であり、これは中心 $(2, 0)$ 、半径 2 の円を表す。したがって、この円の方程式は

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

である。