座標平面において，点 $(0,\ 5)$ を通り，直線 $y=x$ と点 $(a,\ a)$ で接する円 C について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(0,\ 5)$ と直線 $y=x$ と点 $(a,\ a)$ がかかれているとき，コンパスと目盛りのない定規を用いて，円 C を作図する手順を説明せよ．

(2) 円 C の方程式を求めよ．

(3) 円 C の中心の座標を $(s,\ t)$ とするとき，

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(s+t),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-s+t)$$

とおく．このとき，a の値が変化するときの点 $(x,\ y)$ の軌跡を座標平面に図示せよ．

(13 高知大 医・理 1)

(1) 略

(2) $\left(x+\dfrac{1}{5}a^2-2a+\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{5}a^2-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{2}{25}a^4-\dfrac{4}{5}a^3+4a^2-10a+\dfrac{125}{10}$

(3) 略

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

(1) 作図の手順を説明させるとは面白い設問ですね.

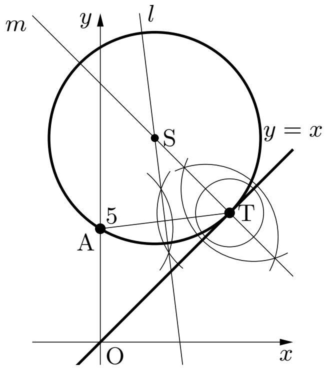
(2) (1) での手順を計算で追っかけます.

(3) (2) において s, t は a で表されています.

【解答】

(1) 点 $(0,\ 5)$ を A，接点 $(a,\ a)$ を T とする．

円 C の中心 S は線分 AT の垂直二等分線と，T を通る直線 $y=x$ と直交する直線との交点である．したがって，円 C は次のように作図することができる．



① 2 点 A と T を中心とする半径の等しい円を 2 点で交わるようにかき，その 2 つの交点を結ぶ直線 l をひく．

⟵ 作図の手順を説明させるとは面白い．

② 点 T を中心とする円をかき，直線 $y=x$ との 2 つの交点を定める．

③ その 2 つの交点を中心とする半径の等しい円を 2 点で交わるようにかき，その 2 つの交点と点 T を結ぶ直線 m をひく．

④ l, m の交点 S を中心とし，点 A を通る円をかく．この円が求める円 C である．　…… (説明終り)

(2) l は 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{T}(a,\ a)$ までの距離が等しい点の軌跡であるから，その方程式は

⟵ (1) の手順を式で表していく．

$$x^2+(y-5)^2=(x-a)^2+(y-a)^2$$

$$\therefore\quad l : 2ax+(2a-10)y=2a^2-25 \qquad \cdots\cdots ①$$

⟵ $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PA}^2=\mathrm{PT}^2$ を満たす．

また，m は点 $\mathrm{T}(a,\ a)$ を通り，直線 $y=x$ に直交する直線であるから，その方程式は

$$y-a=-(x-a)$$

$$\therefore\quad m : y=-x+2a \qquad \cdots\cdots ②$$

⟵ 点 $\mathrm{T}(a,\ a)$ を通る傾き -1 の直線である．

円 C の中心 S は①，②の交点である．②を① に代入して，x 座標を求めると

$$2ax+(2a-10)(-x+2a)=2a^2-25$$

$$x=-\frac{1}{5}a^2+2a-\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

⟵ 中心 S の x 座標

② に代入して，y 座標を求めると

$$y=\frac{1}{5}a^2+\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ④$$

⟵ 中心 S の y 座標

円の半径を r とすると

$$\begin{aligned} r^2 &= \mathrm{SA}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{5}a^2+2a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{5}{2}-5\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{5}a^2+2a-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{5}a^2-\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= 4a^2-4a\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{5}a^2-\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2}{25}a^4-\frac{4}{5}a^3+4a^2-10a+\frac{25}{2} \end{aligned}$$

⟵ キタナイ値ですね．

である．よって，円 C の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x+\frac{1}{5}a^2-2a+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}a^2-\frac{5}{2}\right)^2}$$
$$\boldsymbol{=\frac{2}{25}a^4-\frac{4}{5}a^3+4a^2-10a+\frac{25}{2}} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $(s,\ t)$ は円 C の中心であるから，③，④より

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(s+t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(-\frac{1}{5}a^2+2a-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{5}{2}\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}a \quad \cdots\cdots ⑤ \end{aligned}$$

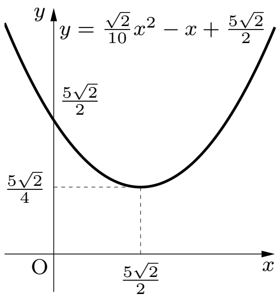
$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-s+t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\left(-\frac{1}{5}a^2+2a-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{5}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{5}a^2-\sqrt{2}a+\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots ⑥ \end{aligned}$$

{⑤, ⑥} を満たす実数 a が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合が求める軌跡である．

⟵ パラメータ a が存在するための $x,\ y$ の条件を求める．

⑤より $a=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ であるから，⑥に代入すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\quad -\sqrt{2}\times\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10}x^2-x+\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10}\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



⟵ この放物線上の点 $(x,\ y)$ に対して，実数 a は $a=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ として存在する．

点 $(x,\ y)$ の軌跡は**右図の放物線**となる． ……(答)

- 円 C の中心 S は，点 A(0, 5) までの距離と直線 $y=x$ までの距離が等しい点であるから，その軌跡は A(0, 5) を焦点，$y=x$ を準線とする放物線である．

(3) の変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

⟵ この行列は回転を表す 1 次変換である．

であり，これは原点を中心とする $-\dfrac{\pi}{4}$ の回転を表している．

求める軌跡は点 $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ を焦点，x 軸を準線とする放物線である．

- 点 $(x,\ y)$ を複素数平面上に $x+yi$ と表すと

$$
\begin{aligned}
x+yi &= \frac{\sqrt{2}}{2}(s+t)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-s+t)i \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\{(1-i)s+(1+i)t\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\left(s+\frac{1+i}{1-i}t\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left\{s+\frac{(1+i)^2}{1-i^2}t\right\} \\
&= \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(s+ti)
\end{aligned}
$$

であるから，点 $(x,\ y)$ は点 $(s,\ t)$ を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{4}$ の回転した点である．

$\longleftarrow$ 新課程対応として，複素数平面上でこの変換を処理しておく．