座標平面上で点 O$(0,\ 0)$ からの距離と点 A$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ からの距離の比が $2:1$ である点 P$(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(13 鳥取大 後 工 1)

中心 $\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)$, 半径 $\dfrac{8}{3}$ の円

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

教科書にも載っている軌跡の頻出問題です．求める軌跡はアポロニウスの円とよばれています．

【解答】

与えられた条件より

$$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=2:1 \iff 4\mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2$$

←― 距離の公式が使いやすいように平方した式にしておく．チェクリピ 111

$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ であるから

$$4\{(x-2\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{2})^2\}=x^2+y^2$$

$$x^2-\frac{16\sqrt{2}}{3}x+y^2-\frac{16\sqrt{2}}{3}y+\frac{64}{3}=0$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$$

←― x, y について平方完成して円の標準形で表す．

よって，点 P の軌跡は，**中心 $\left(\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}},\ \boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$ の円** である．

……(答)

- 2 定点 A，B からの距離の比が $m:n$ $(m \fallingdotseq n)$ である点の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分，外分する点を直径の両端とする円（アポロニウスの円）を描く．
- A の座標をもう少し工夫してキレイな結果が出るように出題して欲しいものです．