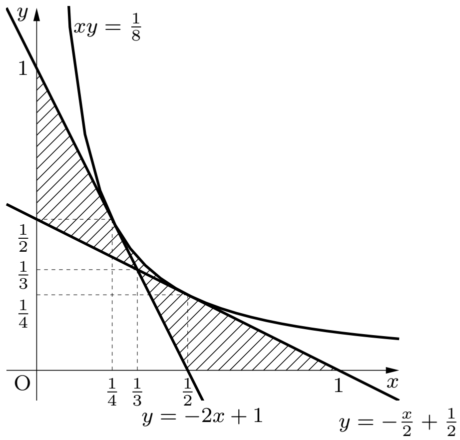
平面上に，原点 O，点 A(1, 0)，点 B(0, 1) を頂点とする △OAB がある．辺 OA 上の動点 P と，辺 OB 上の動点 Q は，線分 PQ が △OAB の面積を 2 等分するように動く．線分 PQ が通る点の全体からなる領域を図示せよ．

(13 一橋大 後 経済 3)



【チェック・チェック】

線分 PQ の通過領域は，直線 PQ の通過領域と △OAB の共通部分として求めます．通過領域の問題もこれができれば自信をもっていいでしょう．
本問を通していろいろな解法 (3 つの解法) を確認しておきましょう．すなわち，

- 方程式とみる
- 関数とみる
- 包絡線をみつける

といった解法です.

【解答】

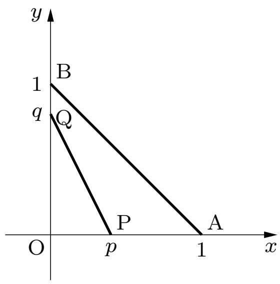
辺 OA 上の点 P，辺 OB 上の点 Q の座標をそれぞれ P(p, 0)，Q(0, q) とおくと，

$0 \leqq p \leqq 1,\ 0 \leqq q \leqq 1$ ……①

であり，線分 PQ が △OAB の面積を 2 等分する条件は，

$$\frac{1}{2}pq = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$\therefore\ \ pq = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$



⟵ △OPQ $= \frac{1}{2}$△OAB

② より $p \neq 0,\ q \neq 0$ であり，①，② をまとめると

$$\{①,\ ②\} \iff \begin{cases} p = \dfrac{1}{2q} \\ 0 < p \leqq 1 \\ 0 < q \leqq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \dfrac{1}{2q} \\ \dfrac{1}{2} \leqq q \leqq 1 \end{cases}$$

である．このとき，直線 PQ の方程式は,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \qquad \therefore\ \ 2qx + \frac{y}{q} = 1$$

$$\therefore\ \ 2q^2x + y - q = 0$$

⟵ p, q のどちらを消去してもよい

よって，直線 PQ が通る点の全体からなる領域を D とすると，点 $(x,\ y)$ が D に含まれる条件は,

⟵ まずは，線分 PQ ではなく，直線 PQ の通過領域を求める

$$\frac{1}{2} \leqq q \leqq 1 \quad \cdots\cdots ③,\quad 2xq^2 - q + y = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

をともに満たす実数 q が存在する …… $(*)$ ことである．点 $(x,\ y)$ は線分 PQ 上の点より $x \geqq 0$ としてよい.

⟵ パラメータ q の存在条件を考える

(i) $x = 0$ のとき

④ を満たす q は $q = y$ であるから，$(*)$ の条件は,

⟵ ④は q の 1 次方程式である

$$\frac{1}{2} \leqq y \leqq 1$$

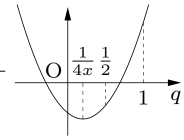
(ii) $x \neq 0$ のとき，$x > 0$ である.

⟵ ④は q の 2 次方程式である

$$f(q) = 2xq^2 - q + y = 2x\left(q - \frac{1}{4x}\right)^2 + y - \frac{1}{8x}$$

とおき，軸 $q = \dfrac{1}{4x}$ の位置で場合分けする.

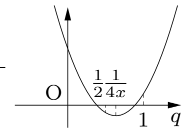
（ア） $0 < \dfrac{1}{4x} \leqq \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{すなわち } x \geqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき



$(*)$ の条件は，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \\
\iff & \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + y \leqq 0 \text{ かつ } 2x - 1 + y \geqq 0 \\
\iff & -2x + 1 \leqq y \leqq -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

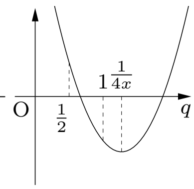
（イ） $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{4x} \leqq 1$ $\left(\text{すなわち } \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき



$(*)$ の条件は，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{4x}\right) \leqq 0 \text{ かつ「} f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \text{ または } f(1) \geqq 0 \text{」} \\
\iff & y - \frac{1}{8x} \leqq 0 \\
& \quad \text{かつ「} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + y \geqq 0 \text{ または } 2x - 1 + y \geqq 0 \text{」} \\
\iff & y \leqq \frac{1}{8x} \\
& \quad \text{かつ「} y \geqq -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \text{ または } y \geqq -2x + 1 \text{」}
\end{aligned}
$$

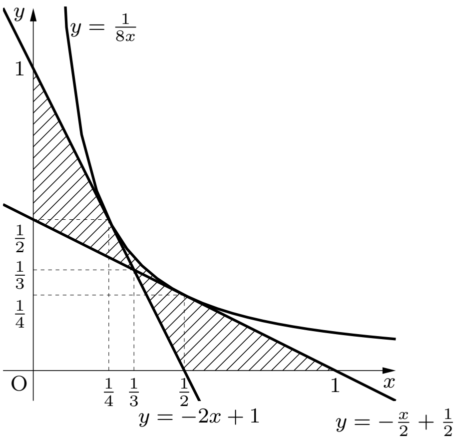
（ウ） $1 \leqq \dfrac{1}{4x}$ $\left(\text{すなわち } 0 < x \leqq \dfrac{1}{4}\right)$ のとき



$(*)$ の条件は，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \text{ かつ } f(1) \leqq 0 \\
\iff & \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + y \geqq 0 \text{ かつ } 2x - 1 + y \leqq 0 \\
\iff & -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -2x + 1
\end{aligned}
$$

よって，求める領域は，△OAB の内部または周と D の共通部分であることより，下図の斜線部分となる．境界も含む．



● (別解 1)

$$\{③,\ ④\} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leqq q \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \\ y = -2xq^2 + q & \cdots\cdots ④' \end{cases}$$

④$'$ において，x を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で固定し，y を q の関数とみる．

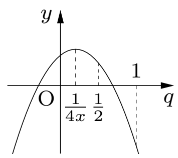
(i) $x = 0$ のとき　　←― y は q の 1 次関数である

　$y = q$ より　　$\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1$

(ii) $x \fallingdotseq 0$ のとき，$x > 0$ である．　　←― y は q の 2 次関数である

$$g(q) = -2xq^2 + q = -2x\left(q - \frac{1}{4x}\right)^2 + \frac{1}{8x}$$

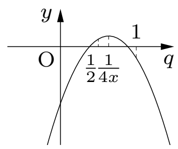
とおき，軸 $q = \dfrac{1}{4x}$ の位置で場合分けする．



（ア） $(0 <)\dfrac{1}{4x} \leqq \dfrac{1}{2}$ $\left(\text{すなわち } x \geqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき　　←―

$$g(1) \leqq y \leqq g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad -2x + 1 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



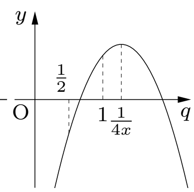
（イ） $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{4x} \leqq 1$ $\left(\text{すなわち } \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき　　←―

$$y \leqq g\left(\frac{1}{4x}\right) \text{ かつ } y \geqq \min\left\{g\left(\frac{1}{2},\ g(1)\right)\right\}$$

$$\iff y \leqq \frac{1}{8x}$$

$$\text{かつ } y \geqq \min\left\{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},\ -2x + 1\right\}$$

←― $\min\{X, X\}$ は X, Y のうちの大きくない方の値である



（ウ） $1 \leqq \dfrac{1}{4x}$ $\left(\text{すなわち } 0 < y \leqq \dfrac{1}{4}\right)$ のとき　　←―

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \leqq y \leqq g(1)$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -2x + 1$$

以上を図示すると【解答】の図を得る．

● (別解 2)　(包絡線を利用する)

$\{③, ④\}$ において

$x = 0$ のとき　　$\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 1$ である．

$x \fallingdotseq 0$ のとき，④は

$$y = -2x\left(q - \frac{1}{4x}\right)^2 + \frac{1}{8x}$$

と変形される．ここで曲線

$$y = \frac{1}{8x} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

←― ここがミソ !!

を考え，④と⑤を連立すると

$$-2x\left(q - \frac{1}{4x}\right)^2 + \frac{1}{8x} = \frac{1}{8x}$$

$$\left(q - \frac{1}{4x}\right)^2 = 0 \quad \therefore \quad q = \frac{1}{4x} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{4q} \ (\text{重解})$$

←― $x > 0$

すなわち，直線④は曲線⑤上の点 $\left(\dfrac{1}{4q},\ \dfrac{q}{2}\right)$ における接線である．q は③の範囲で動くから接点の x 座標は $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ であり，直線④は下図のように動く．これより【解答】の通過領域を得る．

$\longleftarrow$ 直線④の動きがわかった