連立不等式

$$y \geqq |x^2 - 2x|,\ y \leqq -x + 6,\ |x| \leqq 2$$

の表す座標平面上の領域を D とする．

(i) D の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(ii) $(x,\ y)$ が D を動くとき，$4x + y$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(13 上智大 経済 (経営)2 月 6 日 1(3))

キ	ク	ケ
16	12	-1

解答は次のページにあります.

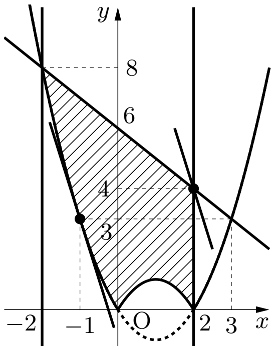
【チェック・チェック】

領域の図示と領域における最大最小の問題です.
(1) は図示できているかの確認として面積を求めています. 図示の採点ができないのもマーク式テストの欠点の一つです.

【解答】

$$D:\begin{cases} y \geqq |x^2-2x| \\ y \leqq -x+6 \\ |x| \leqq 2 \end{cases}$$

(i) $y=|x^2-2x|$ のグラフは, $y=x^2-2x$ のグラフを x 軸に関して $y \geqq 0$ の領域に折り返したものである.



$y=x^2-2x$ と $y=-x+6$ を連立すると

$$x^2-2x=-x+6$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$
$$\therefore \quad x=-2,\ 3$$

これより, 交点の座標は

$$(-2,8)\ ,\ (3,\ 3)$$

である. これより, D は右図の斜線部分 (境界も含む) であり, D の面積 S は

←― D を図示する.

$$S=\int_{-2}^{2}\{-x+6-(x^2-2x)\}\,dx-2\int_{0}^{2}\{-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-x^2+6)dx+2\int_{0}^{2}(x^2-2x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(6-2x)\,dx=2\Big[6x-x^2\Big]_{0}^{2}$$
$$=\mathbf{16} \qquad \cdots\cdots(答)$$

←― 偶関数, 奇関数

(ii) $4x+y=k$ とおく. $(x,\ y)$ が D を動くときの k の値は, 直線 $y=-4x+k$ …… ① が D と共有点をもつときの k の値であるから, ①と D が共有点をもつときの k の最大値, 最小値を求めればよい.

←― 答案ではここまで説明する必要はないが, 理屈を確認しておいた.

①の傾きが -4 であることに注意すると
k が最大となるのは, ①が点 $(x,\ y)=(2,\ 4)$ を通るときで

最大値 : $4\cdot 2+4=\mathbf{12}$ ……(答)

また, $y=x^2-2x$ について $y'=2x-2$ であり

$$2x-2=-4 \text{ を満たすのは } x=-1$$

$x=-1$ は $-2 \leqq x \leqq 0$ を満たすから, ① は $y=x^2-2x$ に点 $(-1,\ 3)$ で接する.

したがって, k が最小となるのは, ①が点 $(x,\ y)=(-1,\ 3)$ で $y=x^2-2x$ に接するときで

最小値 : $4\cdot(-1)+3=\mathbf{-1}$ ……(答)