xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C と，点 $(4,\ 3)$ を中心とする半径 1 の円 D がある．円 C 上に異なる 2 点 A，B があり，円 D 上に点 P がある．2 つの直線 AP，BP は円 C の接線とする．直線 AB と直線 OP の交点を Q とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を $(5,\ 3)$ とするとき，直線 AB の方程式を求めよ．

(2) 上記 (1) のとき，点 Q の座標を求めよ．

(3) 点 P が円 D の円周上を動くとき，点 Q の軌跡が点 $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{8}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{24}$ の円となることを示せ．

(13 京都府大 生命環境 1)

(1) $5x + 3y = 1$

(2) Q $\left(\dfrac{5}{34},\ \dfrac{3}{34}\right)$

(3) 略

【チェック・チェック】

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ に対し，円の外部の点 $(x_0,\ y_0)$ から円に引いた 2 本の接線の接点を A，B とすると，直線 AB の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

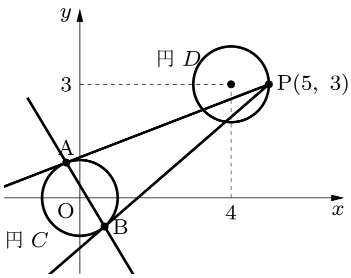
となりますが，このことは答案として示せるようにしておきましょう．

(3) 点 P は円 D 上を動き，P により直線 AB と直線 OP の交点 Q が決まります．Q であるためには Q を与える P が存在しなければなりません．

【解答】

(1) 円 $C: x^2+y^2=1$ $\cdots\cdots$ ①

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ における円 C の接線の方程式はそれぞれ



$$x_1x+y_1y=1$$
$$x_2x+y_2y=1$$

←円の接線の方程式 チェクリピ 100

であり，これらはともに点 P(5, 3) を通るから

$$5x_1+3y_1=1 \quad \cdots\cdots ②$$
$$5x_2+3y_2=1 \quad \cdots\cdots ③$$

である．

ここで，直線 $5x+3y=1$ $\cdots\cdots$ ④ を考える．②，③より，A，B は④上の点である．

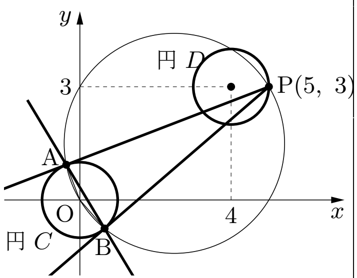
←ここが大切 !!

これより，直線 AB の方程式は④，すなわち，$\boldsymbol{5x+3y=1}$ である．$\cdots\cdots$(答)

←点 P を極，直線 AB を極線といいます．

- ∠OAP =∠OBP =90°

より，点 A，B は O，P を直径の両端とする円



$$x(x-5)+y(y-3)=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

上の点である．

←2 定点 O，P に対し ∠OXP が一定ならば，点 X は円周上のある部分を動きます．特に，∠OXP =90° ならば，X は O，P を直径の両端とする円周上をえがきます (O，P は除く)．

したがって，直線 AB の方程式は ① − ⑤ より

$$5x+3y=1$$

である．

(2) Q は直線 AB と直線 OP: $3x-5y=0$ $\cdots\cdots$ ⑥ の交点であるから，④と⑥を連立して

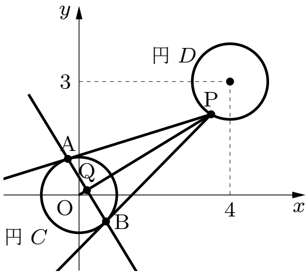
$$\begin{cases}5x+3y=1\\3x-5y=0\end{cases} \qquad \therefore\quad \mathrm{Q}\left(\boldsymbol{\frac{5}{34}},\ \boldsymbol{\frac{3}{34}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) P の座標を $(p,\ q)$ とする．
(1)，(2) と同じようにすると，Q は 2 直線

$$\mathrm{AB} : px+qy=1 \quad \cdots\cdots ⑦$$
$$\mathrm{OP} : qx-py=0 \quad \cdots\cdots ⑧$$

の交点である．また，p，q は

$$(p-4)^2+(q-3)^2=1 \quad \cdots\cdots ⑨$$



を満たすから，Q の軌跡を求めるには，{⑦，⑧，⑨} を満たす p，q が存在するための x，y の条件を求めればよい．{⑦，⑧} を p，q について解くと

$\longleftarrow$ 軌跡の方程式
チェクリピ

$$\begin{cases} xp+yq=1 \\ -yp+xq=0 \end{cases}$$

⑦を満たす x，y は $x^2+y^2 \fallingdotseq 0$ であるから

$$p=\frac{x}{x^2+y^2},\ q=\frac{y}{x^2+y^2}$$

これを⑨に代入すると

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}-4\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}-3\right)^2=1$$
$$\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{8x}{x^2+y^2}-\frac{6y}{x^2+y^2}+25=1$$
$$1-8x-6y+24(x^2+y^2)=0$$
$$x^2+y^2-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{24}=0$$
$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{1}{24}\right)^2$$

よって，点 Q の軌跡は点 $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{8}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{24}$ の円となる． $\cdots\cdots$ (証明終わり)