連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x-3| \\ y \leqq x \end{cases}$ の表す領域を D とする.

(1) 領域 D を図示しなさい.
(2) a を 2 でない正の定数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+y$ の最大値と最小値およびそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい.
(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求めなさい.

(13 大分大 工・教育福祉科学・経済 2)

(1) 略
(2) 最大値 : $3a+3$ このとき $(x,\ y)=(3,\ 3)$

最小値 : $\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき，} & \dfrac{3}{2} \text{ このとき } (x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right) \\ 2<a \text{ のとき，} & a+1 \text{ このとき } (x,\ y)=(1,\ 1) \end{cases}$

(3) 最小値 : $\dfrac{9}{5}$ このとき $(x,\ y)=\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

解答は次のページにあります.

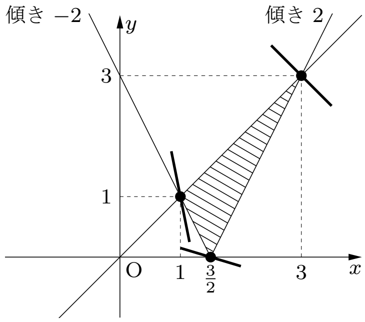
【チェック・チェック】

領域における最大最小の問題で，(2) で x, y の 1 次式，(3) で x, y の 2 次式の値が問われています．(2) においては定数 a が含まれた式なので場合分けが生じます．

【解答】

(1) $D:\begin{cases} y \geqq |2x-3| \\ y \leqq x \end{cases}$

D は右図の斜線部分である．境界も含む．



(2) $ax+y=k$ とおく．点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くときの k の値は，直線 $y=-ax+k$ …… ① と D が共有点をもつときの y 切片の値である．

⟵ ①が D と共有点をもつための k の値の最大値，最小値を求める．

傾き $-a$ が -2 でない負の値であることに注意すると，k が最大となるには，①が点 $(3,\ 3)$ を通るときであり

最大値 : $3a+3$

k の最小値については，$-a$ と -2 と大小で場合分けする．

⟵ $-a<0$ かつ $-a \neq -2$

$-2<-a<0$ $(0<a<2)$ のとき，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るときに最小値 $\dfrac{3}{2}a$

$-a<-2$ $(2<a)$ のとき，点 $(1,\ 0)$ を通るときに最小値 $a+1$

をとる．以上より

最大値 : $\boldsymbol{3a+3}$ **このとき** $\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 3)}$ ……(答)

最小値: $\begin{cases} \boldsymbol{0<a<2} \text{ のとき，} \boldsymbol{\dfrac{3}{2}} \text{ このとき } \boldsymbol{(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)} \\ \boldsymbol{2<a} \text{ のとき，} \boldsymbol{a+1} \text{ このとき } \boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1)} \end{cases}$

……(答)

- $f(x,\ y)=ax+y$ とすると，$f(x,\ y)$ の最大値，最小値の候補は

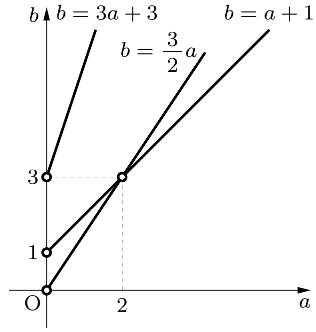
⟵ D の頂点が最大値，最小値を与える点の候補である．

$f(1,\ 1)=a+1$

$f(3,\ 3)=3a+3$

$f\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)=\dfrac{3}{2}a$

であり，これらを ab 平面に図示すると右のようになる．3 つの大小を比較すると

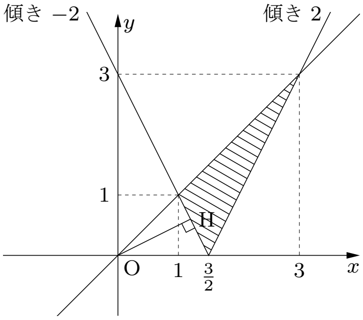


$(x,\ y)=(3,\ 3)$ で最大値 $3a+3$

$0<a<2$ のとき $(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ で最小値 $\dfrac{3}{2}a$

$2<a$ のとき $(x,\ y)=(1,\ 1)$ で最小値 $a+1$

(3) $\mathrm{P}(x,\ y)$ を D 内の点とすると，x^2+y^2 は原点と P との距離の平方 OP^2 である．OP^2 の最小値を求める．



⟵ 原点と D との距離の最小を調べる．

原点 O から直線 $y=-2x+3$ に下ろした垂線の足を H とすると，H の座標は

$$\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

を解いて

$$\mathrm{H}\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

$x=\dfrac{6}{5}$ は $1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ を満たすから，H は D 内の点であり，x^2+y^2 は $(x,\ y)=\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ で最小となる．最小値は

⟵ H が D 内の点であることを確認した．

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\boldsymbol{\frac{9}{5}}$$ ……(答)