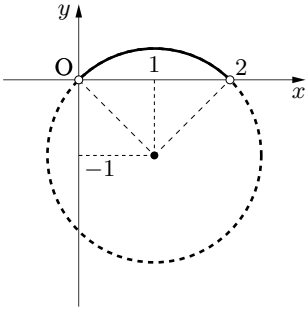
r を正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円を C とする．点 $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{2}{r+2}\right)$ から C に傾きが正の接線を引き，接点を P とする．r がすべての正の実数を動くとき，P の軌跡を図示せよ．

(13 横浜国大 後期 経済・経営 6)



【チェック・チェック】

接点 P は $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ を満たすので，P は点 A，B を直径の両端とする円周上の点とみることができます．

円外の点 B から円 C に 2 本の接線を引くことができます．傾き正の接線での接点が P なので，この条件も忘れないようにしましょう．

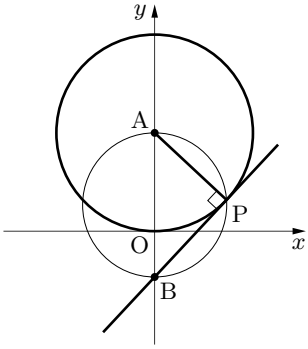
【解答】

円 C の方程式は

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

$$\therefore\quad x^2+y^2-2ry=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

← C は中心 $(0,\ r)$，半径 r の円である



また，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ より，点 P は A，B を直径の両端とする円

$$x^2+(y-r)\left(y+\frac{2}{r+2}\right)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

上の点である．① − ② より

$$-2ry-\left(\frac{2}{r+2}-r\right)y+\frac{2r}{r+2}=0$$

$$\left(\frac{2}{r+2}+r\right)y=\frac{2r}{r+2}$$

$r>0$ より $r+2\neq 0$ であり

$$(r^2+2r+2)y=2r \qquad \cdots\cdots ③$$

$r>0$ のとき，{①，②} $\iff$ {①，③} である．また，P は B から C に引いた傾きが正の接線の接点であるから，P の座標 $(x,\ y)$ は {①，③，$x>0$} を満たす．

← 加減法の原理

したがって，P の軌跡を求めるには，{①，③，$x>0$} を満たす正の実数 r が存在するための x，y の条件を求めればよい．

← この考え方が大切 !! チェクリピ

③において，$r^2+2r+2=(r+1)^2+1>0$ より，r と y の符合は一致するから

$$r>0 \iff y>0 \qquad \cdots\cdots ④$$

これより①は $r=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$ であり，③に代入すると

$$\left\{\left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right)^2+2\frac{x^2+y^2}{2y}+2\right\}y=2\frac{x^2+y^2}{2y}$$

$$(x^2+y^2)^2+4y(x^2+y^2)+8y^2=4(x^2+y^2)$$

$$(x^2+y^2)^2+4y(x^2+y^2)+4(y^2-x^2)=0$$

$$(x^2+y^2+2x+2y)(x^2+y^2-2x+2y)=0$$

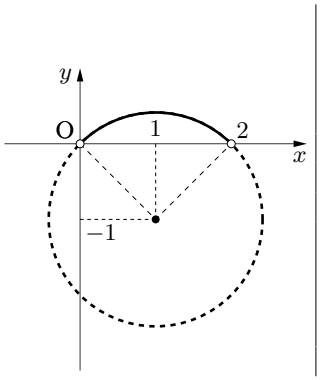
$x>0,\ y>0$ より $x^2+y^2+2x+2y\neq 0$ であり，

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$

$$\therefore \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

$x > 0,\ y > 0$ とあわせて図示すると**右図の太線部分**となる．

……(答)



図より，軌跡の方程式は

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

かつ $y > 0$

である．