a は 0 でない定数とし，b と c を定数とする．k がすべての実数を動くとき，xy 平面上の直線 $l : y = kx + k^2 + 3k + 1$ はつねに放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ に接するものとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) a, b, c の値を求めなさい．

(2) 直線 l と放物線 C の接点を P とするとき，原点 O と点 P を結ぶ線分 OP の中点 Q$(s,\ t)$ の軌跡の方程式を求めなさい．

(13 首都大学東京 都市教養 (文系) 4)

(1) $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{3}{2}$, $c = -\dfrac{5}{4}$

(2) $y = -\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1) l はつねに C に接するということより，l の係数 k についての恒等式が得られます．
(2) 線分 OP の中点 Q の座標は k でパラメータ表示されます．

【解答】

$$l : y = kx + k^2 + 3k + 1$$

$$C : y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

(1) l と C の方程式を連立すると

$$ax^2 + bx + c = kx + k^2 + 3k + 1$$

$$ax^2 + (b-k)x + c - k^2 - 3k - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

← $(*)$ の実数解は l と C の共有点の x 座標である．

l はつねに C に接するから $(*)$ はすべての実数 k に対して重解をもつ．判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (b-k)^2 - 4a(c - k^2 - 3k - 1) \\ &= (1+4a)k^2 + 2(6a-b)k + b^2 - 4ac + 4a \\ &= 0 \end{aligned}$$

← l が C に接するということは，共有点をただ 1 個もつということであるから，$D = 0$ である．

これがすべての実数 k に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases} 1 + 4a = 0 \\ 6a - b = 0 \\ b^2 - 4ac + 4a = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{4},\ b = -\frac{3}{2},\ c = -\frac{5}{4}} \qquad \cdots\cdots (答)$$

(2) (1) より，$(*)$ は

$$-\frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{3}{2} + k\right)x - k^2 - 3k - \frac{9}{4} = 0$$

$$x^2 + 2(2k+3)x + 4k^2 + 12k + 9 = 0$$

$$(x + 2k + 3)^2 = 0 \qquad \therefore \quad x = -2k - 3$$

これが接点 P の x 座標である．y 座標は

$$y = k(-2k-3) + k^2 + 3k + 1 = -k^2 + 1$$

である．Q$(s,\ t)$ は線分 OP の中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} \iff \begin{cases} s = -k - \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{k^2}{2} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

← パラメータ k が存在するための x，y の条件を求める．

$$\iff \begin{cases} k = -s - \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2}\left(-s - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

← 放物線上の点 $(s,\ t)$ に対して，k は $k = -s - \dfrac{3}{2}$ として決まる (存在する)．

よって，中点 Q の軌跡の方程式は，放物線

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．