C を放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ とする．点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が条件 $b<\dfrac{a^2}{2}$ を満たすとき，P から C に 2 本の接線を引き，2 つの接点を通る直線を l とする．

(1) C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は $y+y_0=x_0x$ であることを示せ.
(2) l の方程式は $y+b=ax$ であることを示せ.
(3) P が円 $x^2+(y+2)^2=1$ の上を動くとき，l が通る領域を求め，図示せよ.

(13 千葉大 後期 理 (数・情) 2)

(1) 略
(2) 略
(3) $x^2-(y-2)^2 \geqq -1$，図は略

【チェック・チェック】

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

です．まずは導関数 $f'(x)$ を求めましょう．

(2) (1) の接点 $(x_0,\ y_0)$ を P $(a,\ b)$ に置き換えたものが求める方程式になっています．

(3) 直線 l は点 P により決まり，P の座標は円上の点であるから $\cos\theta$，$\sin\theta$ で表すことができます．θ を含む直線 l の通過領域を求めるには θ の存在条件を考えましょう．

【解答】

(1) $C: y=\dfrac{x^2}{2}$，$y'=x$ より，C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$y=x_0(x-x_0)+y_0$$

$$y=x_0x-y_0 \quad (\because\ {x_0}^2=2y_0)$$

←― 接線の方程式

よって，求める接線の方程式は $y+y_0=x_0x$ である．

…… (証明終わり)

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた 2 本の接線の C との接点をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とする．(1) よりそれぞれの接線の方程式は

$$y+y_1=x_1x$$

$$y+y_2=x_2x$$

ともに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るので，

$$b+y_1=ax_1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$b+y_2=ax_2 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす．ここで，直線

$$y+b=ax \quad \cdots\cdots ③$$

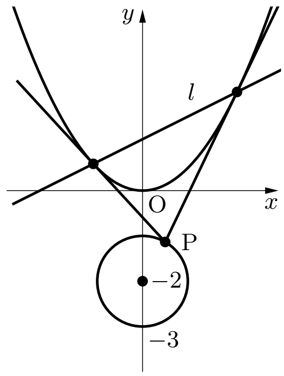
←― ここがミソ !!

を考える．①，②より 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ は③上の点である．これより直線③，すなわち $y+b=ax$ は 2 つの接点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線 l の方程式である．

←― P を極，直線③を極線という

…… (証明終わり)

(3) $\mathrm{P}(a,\ b)$ が円 $x^2+(y+2)^2=1$ 上を動くとき，点 $(a,\ b)$ は $b<\dfrac{a^2}{2}$ を満たすから，l の方程式は③である．



また，a，b は

$$\begin{cases} a=\cos\theta \\ b=-2+\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

←― $\mathrm{P}(a,\ b)$ は中心 $(0,\ -2)$，半径 1 の円上の点である

とおける．これを③に代入し，θ について整理すると

$$y-2+\sin\theta=x\cos\theta$$

$$x\cos\theta-\sin\theta=y-2 \quad \cdots\cdots ④$$

点 $(x,\ y)$ が l の通過領域内の点であるための条件は

点 $(x,\ y)$ を通る直線 l が存在する

$\iff$ ③ をみたす $(a,\ b)$ が存在する

$\iff$ ④ をみたす $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在する

ことである．したがって，l の通過領域を求めるには，④ をみたす $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在するための x, y の条件を求めればよい．

←― ここが大切 !!
チェクリピ

④は

$$\sqrt{x^2+1}\cos(\theta+\alpha) = y-2$$

と変形される．ここで，α は

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

を満たす値である．求める条件は

$$\left|\frac{y-2}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leqq 1$$

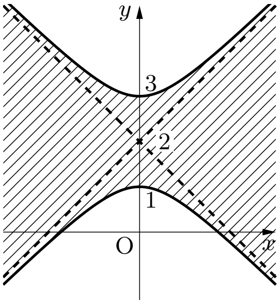
$$\iff |y-2| \leqq \sqrt{x^2+1}$$

$$\iff \boldsymbol{x^2-(y-2)^2 \geqq -1}$$

……(答)

←― θ が存在する条件は $|\cos\theta| \leqq 1$

これを図示すると右図の斜線部分のようになる．境界はすべて含む．



- $X=\cos\theta$, $Y=\sin\theta$ とおき，

  直線 $xX-Y=y-2$ と円 $X^2+Y^2=1$ が共有点をもつための x, y の条件を求めてもよい．これは

$$\left|\frac{-y+2}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leqq 1$$

  であり，以下解答と同じである．

←― 中心と直線との距離 $\leqq$ 半径