平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}$ を求めよ．

(13 京都大 理 1 文 2)

$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ} = 19:3$

解答は次のページにあります.

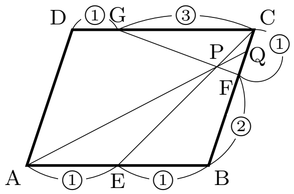
【チェック・チェック】

2 直線の交点を扱った問題ですが，図形が平行四辺形になっているので，三角形のときよりもベクトルの扱いに幾分注意が必要となります．平面上のどんなベクトルも 2 つの 1 次独立なベクトルで表すことができます．

【解答】

P は直線 CE 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AE}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{1}{2}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$$
$$= \frac{1}{2}(1+s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots\cdots ①$$



⟵ P は直線 CE と直線 FG の交点である．

となる実数 s が存在する．

また，P は直線 FG 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}} + t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$
$$= (1-t)\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + t\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立であるから，①，②より

⟵ 2 通りの表現①，②をつくる．

⟵ 1 次独立による表現の一意性

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1+s) = 1 - \frac{3}{4}t \\ s = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t \end{cases} \qquad \begin{cases} 2s + 3t = 2 \\ 3s - t = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad s = \frac{8}{11},\ t = \frac{2}{11}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{19}{22}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \cdots\cdots (*)$$

次に，Q は直線 AP 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{19k}{22}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8k}{11}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \cdots\cdots ③$$

となる実数 k が存在する．さらに，Q は直線 BC 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}} \qquad \cdots\cdots ④$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立であるから，③，④より

⟵ 2 通りの表現③，④をつくる．

⟵ 1 次独立による表現の一意性

$$\begin{cases} \frac{19k}{22} = 1 \\ \frac{8k}{11} = u \end{cases} \qquad \therefore \quad k = \frac{22}{19},\ u = \frac{16}{19}$$

よって

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PQ} = 1 : (k-1) = 19 : (22-19) = \mathbf{19 : 3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $(*)$ の $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{19}{22}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{19}{22}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{11}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$= \frac{3}{22}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{19}{22}\,\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 16\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{19}$$

⟵ 分点公式が現れるように式を変形する．

$\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+16\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{19}$ の終点は直線 AP 上にあり，かつ線分 BC を 16 : 3 に内分する点であるから辺 BC 上の点でもある．すなわち，点 Q である．

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{19}{22}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

よって， $\mathrm{AP} : \mathrm{PQ} = 19 : (22-19) = 19 : 3$