△OAB において，辺 OA を 3 : 4 に内分する点を D，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を E とする．また，t を $0 < t < 1$ を満たす実数とするとき，辺 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を P とし，線分 BD と線分 OP との交点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および t を用いて表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を a, b および t を用いて表しなさい．

(3) 点 Q が直線 AE 上にあるとき，t の値を求めなさい

(13 山口大 農・共同獣医・教育・経済 1)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a} + \dfrac{3t}{7-4t}\vec{b}$

(3) $t = \dfrac{8}{11}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

2 直線の交点を扱ったベクトルの基本問題です.

交点を，1 次独立な 2 つのベクトルで 2 通りに表し，係数を求めます．1 次独立なベクトルによる表現の一意性が効果を発揮します.

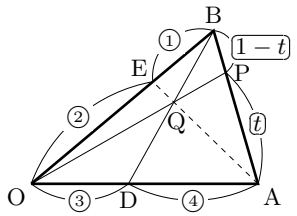
幾何的性質のメネラウスの定理，チェバの定理も使う解法もあります.

【解答】

(1) 点 P は辺 AB を $t:(1-t)$ に内分しているから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \boldsymbol{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}}$$

……(答)



⟵ 分点公式

(2) Q は線分 OP 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= k(1-t)\vec{a} + kt\vec{b} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる.

一方，Q は線分 BD 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= (1-s)\frac{3}{7}\vec{a} + s\vec{b} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すこともできる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

$$\begin{cases} k(1-t) = (1-s)\dfrac{3}{7} \\ kt = s \end{cases}$$

⟵ 1 次独立による表現の一意性

$$\iff \begin{cases} 7(1-t)k = 3 - 3tk \\ s = tk \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (7-4t)k = 3 \\ s = tk \end{cases}$$

$0 < t < 1$ より $7 - 4t \neq 0$ であるから

$$k = \frac{3}{7-4t},\ s = \frac{3t}{7-4t}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{\frac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a} + \frac{3t}{7-4t}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots ③ \quad \cdots\cdots(答)$$

- ①を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k(1-t)\vec{a} + kt\vec{b}$$
$$= k(1-t)\left(\frac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) + kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{7}{3}k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ここで，Q は直線 BD 上の点であるから

$$\frac{7}{3}k(1-t)+kt=1$$
$$\therefore\quad k(7-4t)=3$$

$0<t<1$ より $7-4t \neq 0$ であるから

$$k=\frac{3}{7-4t}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a}+\frac{3t}{7-4t}\vec{b}$$

← Q が直線 BD 上の点であるための条件

- メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QP}}\times\frac{1-t}{1}\times\frac{4}{3}=1$$
$$\therefore\quad \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QP}}=\frac{3}{4(1-t)}$$
$$\therefore\quad \mathrm{OQ}:\mathrm{QP}=3:(4-4t)$$

← $\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QP}}\times\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BA}}\times\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=1$
(チェクリピ　367)

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7-4t}\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}$$
$$=\frac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a}+\frac{3t}{7-4t}\vec{b}$$

(3) Q が直線 AE 上の点であるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-u)\vec{a}+u\frac{2}{3}\vec{b}\qquad\cdots\cdots ④$$

と表すことができる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，③，④ より

$$\begin{cases}\dfrac{3(1-t)}{7-4t}=1-u\\[2ex] \dfrac{3t}{7-4t}=\dfrac{2u}{3}\end{cases}\iff\begin{cases}3-3t=(7-4t)-\dfrac{9t}{2}\\[2ex] u=\dfrac{9t}{2(7-4t)}\end{cases}$$

← 1 次独立による表現の一意性

$$\therefore\quad t=\frac{8}{11},\ u=\frac{4}{5}$$

これは条件 $0<t<1$ を満たしている．

よって，求める t の値は　$t=\boldsymbol{\frac{8}{11}}$　……(答)

- (2) の結果を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3(1-t)}{7-4t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3t}{7-4t}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$$
$$=\frac{3(1-t)}{7-4t}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9t}{2(7-4t)}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

Q は直線 AE 上の点であるから

$$\frac{3(1-t)}{7-4t}+\frac{9t}{2(7-4t)}=1$$
$$6(1-t)+9t=2(7-4t)$$
$$\therefore\quad 11t=8\qquad\therefore\quad t=\frac{8}{11}$$

← Q が直線 AE 上の点であるための条件

これは条件 $0<t<1$ を満たしている．

- チェバの定理より

$$\frac{1-t}{t} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} = 1$$

$$\therefore \quad 8 - 8t = 3t \qquad \therefore \quad t = \frac{8}{11}$$

$$\longleftarrow \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PA}} \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}} \times \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EB}} = 1$$

(チェクリピ　368)