s, t, u を正の実数とする．点 O を内部に含む △ABC について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると，$s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0}$ が成り立っている．直線 CO と線分 AB の交点を D とし，△BCO の面積を S_A，△CAO の面積を S_B，△ABO の面積を S_C とする．

(1) 面積の比 $S_A : S_B$ は，線分の長さの比 BD : AD に等しいことを示せ．
(2) 比 BD : AD を s, t, u を用いて表せ．
(3) 比 $S_A : S_B : S_C$ を s, t, u を用いて表せ．

(13 山梨大 教育人間科学・生命環境 3)

(1) 略
(2) BD : AD $= s : t$
(3) $S_A : S_B : S_C = s : t : u$

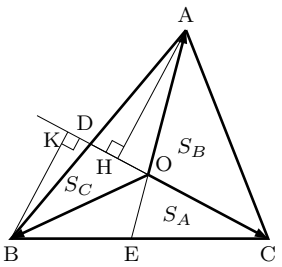
解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

分点公式が現れると点の位置を知ることができます．これを面積比に応用します．

【解答】

(1) 右図のように，2 点 A，B から直線 CO に下ろした垂線の足をそれぞれ H，K とすると



$$S_A : S_B$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{BK} : \frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{AH}$$
$$= \mathrm{BK} : \mathrm{AH}$$
$$= \mathrm{BD} : \mathrm{AD}$$
$$(\because\ \triangle\mathrm{BDK} \backsim \triangle\mathrm{ADH})$$

← OC は △BCO，△CAO の共通辺である．

よって，題意は示された． ……(証明終わり)

(2) $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} = \vec{0}$ $(s > 0,\ t > 0,\ u > 0)$

を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{u}$$
$$= -\frac{s+t}{u}\,\frac{s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{s+t} \qquad \cdots\cdots ①$$

← 直線 CO と線分 AB の交点 D が現れる表現をつくる．

$\dfrac{s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{s+t}$ の終点を D′ とすると，分点公式により D′ は線分 AB を $t : s$ に内分する点であり，①より D′ は直線 CO 上の点でもある．すなわち，D′ は点 D である．

$$\therefore\quad \mathrm{BD} : \mathrm{AD} = \mathrm{BD}' : \mathrm{AD}' = \boldsymbol{s : t} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) (1)，(2) より

$$S_A : S_B = s : t \qquad \cdots\cdots②$$

直線 AO と辺 BC の交点を E とすると，(1)，(2) と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{t\vec{b} + u\vec{c}}{s} = -\frac{t+u}{s}\,\frac{t\vec{b} + u\vec{c}}{t+u} = -\frac{t+u}{s}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

であり，E は線分 BC を $u : t$ に内分する点である．

$$S_B : S_C = \mathrm{CE} : \mathrm{BE} = t : u \qquad \cdots\cdots ③$$

よって，②，③ より

$$S_A : S_B : S_C = \boldsymbol{s : t : u} \qquad \cdots\cdots(答)$$

← ②，③を連比としてまとめる．

← チェクリピ (365)