△ABC の辺 BC を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 AP を $(1-t):t$ $(0<t<1)$ に内分する点を Q とする．等式

$$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$$

が成り立つとき，t の値は $\boxed{④}$ である．

(13 関西大 シス・環境・化生命 2 月 2 日 4(3))

④
$\dfrac{4}{7}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

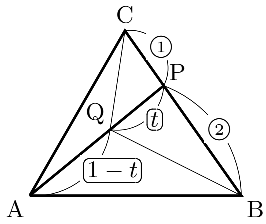
与えられた条件を分点公式を用いて表してみましょう．使うベクトルの始点は A，B，C のどの点でも構わないのですが，線分 AP が登場するので A を始点にとることにしましょう．

【解答】

P は辺 BC を 2 : 1 に内分する点より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

⟵ 分点公式



であり，Q は線分 AP を $(1-t):t$ に内分する点より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= (1-t)\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．

一方，Q は等式

$$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \vec{0}$$

を満たすから

$$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + (\overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + 2(\overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \vec{0}$$

⟵ 始点を A にそろえる．

$$7\overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7} = \frac{3}{7}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②において，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3} \fallingdotseq \vec{0}$ より

$$1 - t = \frac{3}{7} \qquad \therefore \quad t = \boxed{\boldsymbol{\frac{4}{7}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

④