平面上において，原点 O と 2 点 A(1, 1)，B(2, 1) に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を考える．定数 s と t が条件 $s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ 1 \leqq s+t \leqq 2$ をみたしながら変わるとき，点 P の描く図形の面積を求めよ．さらに内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と最小値も求めよ．

(13 信州大 後 医 3(1))

面積は $\dfrac{3}{2}$，最大値は 6，最小値は 2

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

領域の図示問題です．ベクトルによる説明がつけられるようにしておきましょう．ベクトルの係数 $(s,\ t)$ を斜交座標とみる視点も大切です．

【解答】

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ において，
定数 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha+\beta=1$ をみたしながら変わるとき，点 P は直線 AB 上を動き，
さらに，条件 $\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0$ が加わると，点 P は線分 AB 上 (両端も含む) を動く．

← $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1$ が表す図形的意味が基本です．チェクリピ (領域の図示)

$s+t=k$ とおくと，条件 $1\leqq s+t\leqq 2$ より

$$1\leqq k\leqq 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．①の範囲で k を固定するとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

← $\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}+\frac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}_k} \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，条件 $s\geqq 0,\ t\geqq 0$ とあわせると

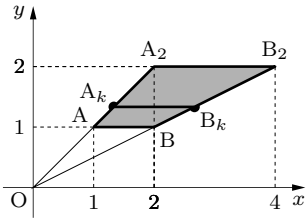
$$\frac{s}{k}\geqq 0,\ \frac{t}{k}\geqq 0,\ \frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

← 線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ を表す図形的表現が得られた．

である．

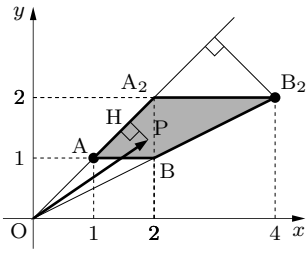
②かつ③をみたす点 P は線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ 上 (両端も含む) を動く．

次に k を①の範囲で動かすと，線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ は線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ から $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ まで平行に動く．ここで，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ は線分 AB であり，線分 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ は 2 点 $\mathrm{A}_2(2,\ 2)$，$\mathrm{B}_2(4,\ 2)$ を結ぶ線分である．すなわち，点 P の描く図形は右図の台形 $\mathrm{ABB_2A_2}$ である．台形 $\mathrm{ABB_2A_2}$ の面積は



$$\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{A_2B_2})\times(\text{高さ})$$
$$=\frac{1}{2}(1+2)\times 1=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

また，P から直線 $\mathrm{AA_2}$ に下した垂線の足を H とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$$
(θ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角)
$$=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}| \quad (\because\ \theta \text{ は鋭角})$$
$$=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

← $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\times(\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影)

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ は $\mathrm{P}=\mathrm{B_2}$ のとき最大となり，$\mathrm{P}=\mathrm{A}$ のとき最小となる．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の

最大値は　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=4+2=\mathbf{6}$　……(答)

最小値は　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1+1=\mathbf{2}$　……(答)

である．

- 点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=s+2t\\y=s+t\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}s=2y-x\\t=x-y\end{cases}$$

←― ベクトルの成分計算を利用した解法

したがって

$$\begin{cases}s\geqq 0\\t\geqq 0\\1\leqq s+t\leqq 2\end{cases}\iff\begin{cases}2y-x\geqq 0\\x-y\geqq 0\\1\leqq y\leqq 2\end{cases}$$

この不等式で表される領域を xy 平面に図示すると上の解答の台形 $\mathrm{ABB_2A_2}$ を得る．

また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x+y$$

である．$x+y=k$ とおき，直線 $y=-x+k$ と台形 $\mathrm{ABB_2A_2}$ が共有点をもつための k の条件を調べると，k は点 $(4,\ 2)$ を通るとき最大値 6 となり，点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ を通るとき最小値 2 となる．

- $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \text{かつ}\ (*)\begin{cases}s\geqq 0\\t\geqq 0\\1\leqq s+t\leqq 2\end{cases}$$

をみたす点 P の描く図形を $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基底とみて図示する．

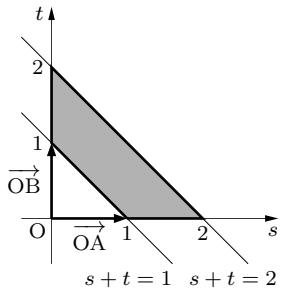
こころの準備として，基底 $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

にとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$$

より，P は st 平面上の動点であり，$(*)$ を満たす領域は，右図の網目部分である．

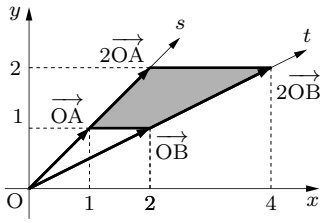


←― 直交座標系

本問では，基底 $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

にとっているから $(*)$ を満たす領域は，右図の網目部分である．



←― 斜交座標系