xy 平面上に 4 点 O(0, 0)，A(-1, 2)，B(2, 1)，P(u, v) がある．点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cos\alpha + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\sin\beta \quad (\text{ただし}, 0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$$

を満たすとき，点 P の存在する領域を図示せよ．

(13 信州大 教育 3)

略

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

領域の図示の問題です．α，β は独立に動く変数です．まずは一方を固定したときの動点 P の動きを調べ，次に固定してあったものを動かし全体像を求めます．

成分計算して α，β の存在条件に持ち込むこともできます．

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cos\alpha + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\sin\beta \qquad \cdots\cdots ①$$

←― チェクリピ (374)

ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ より

$$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \sin\beta \leqq 1$$

である．

変数が 2 個あるときは，まず一方を固定し，他方を動かしたときの様子を調べる．

いま，α を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cos\alpha$ すると，①は

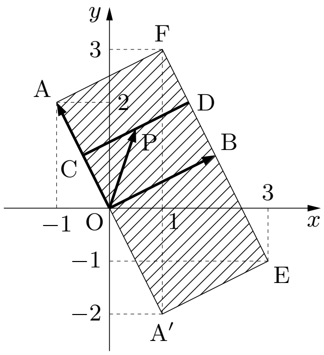
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\sin\beta$$

←― 直線のベクトル方程式である．

であり，P は点 C を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と平行な直線上を動く．$\sin\beta$ は $0 \leqq \sin\beta \leqq 1$ の範囲で変化するから，P は右図の線分 CD 上を動く．

次に，$\cos\alpha$ を $-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$ の範囲で変化させると，右図で C は線分 AA$'$ 上を A$'$ から A まで動く．このとき，D は線分 EF 上を E から F まで動く．

ただし，4 点 A，A$'$，E，F の座標は



$$\mathrm{A}(-1,\ 2),\ \mathrm{A}'(1,\ -2),\ \mathrm{E}(3,\ -1),\ \mathrm{F}(1,\ 3)$$

である．

よって，P の存在範囲は，**右図の長方形 AA$'$EF の周および内部である**． $\cdots\cdots$(答)

- 点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos\alpha + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin\beta$$

$$\begin{cases} -\cos\alpha + 2\sin\beta = x \\ 2\cos\alpha + \sin\beta = y \end{cases}$$

$$\therefore\quad \cos\alpha = \frac{-x+2y}{5},\quad \sin\beta = \frac{2x+y}{5}$$

また，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ より

$$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \sin\beta \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

P が求める領域内の点であるための条件は，①を満たす α，β が存在することであるから

←― ここの言い回しが，大切．

$$\begin{cases} -1 \leqq \dfrac{-x+2y}{5} \leqq 1 \\ 0 \leqq \dfrac{2x+y}{5} \leqq 1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} -5 \leqq -x+2y \leqq 5 \\ 0 \leqq 2x+y \leqq 5 \end{cases}$$

である．これを図示すると，解答の長方形 AA$'$EF の周および内部となる．