半径 1 の外接円をもつ三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とおく．$2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ．

(2) 辺 AB，AC の長さをそれぞれ求めよ．

(3) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とおく．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(13 奈良女大 理 1)

(1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{3}$

(2) $\mathrm{AB} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$\mathrm{AC} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が登場するように $2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ を変形しましょう.

(2) $\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|$ であり，平方して展開すると $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が現れます.

(3) AB，AC の長さと $\angle\mathrm{BAC}$ をつなげることを考えましょう.

【解答】

(1) $2\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より，$2\vec{a}+3\vec{b}=-3\vec{c}$ であり

$\longleftarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が登場するように式変形する.

$$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|-3\vec{c}|^2$$

$$4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=9|\vec{c}|^2$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9-4-9}{12}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$

$$=1+\frac{2}{3}+1=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ \mathbf{AB}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

同様にして，$2\vec{a}+3\vec{c}=-3\vec{b}$ であり

$\longleftarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{c}$ が登場するように式変形する.

$$4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2=9|\vec{b}|^2$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{9-4-9}{12}=-\frac{1}{3}$$

これより

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ \mathbf{AC}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $3\vec{b}+3\vec{c}=-2\vec{a}$ であり

$\longleftarrow$ $\vec{b}\cdot\vec{c}$ が登場するように式変形する.

$$9|\vec{b}|^2+18\vec{b}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2=4|\vec{a}|^2$$

$$\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{4-9-9}{18}=-\frac{7}{9}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2$$

$$=-\frac{7}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1=\frac{8}{9}$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{\frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{\frac{8}{3}}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\longleftarrow$ (2) の利用を考えた.

- $\triangle\mathrm{ABC}$ において，余弦定理を用いる.

$3\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=-2\overrightarrow{a}$ であり

$$9|\overrightarrow{b}|^2+18\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+9|\overrightarrow{c}|^2=4|\overrightarrow{a}|^2$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\frac{4-9-9}{18}=-\frac{7}{9}$$

これより

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2&=|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{c}|^2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+|\overrightarrow{b}|^2\\&=1-2\times\left(-\frac{7}{9}\right)+1=\frac{32}{9}\end{aligned}$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-\frac{32}{9}}{2\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{\frac{8}{3}}}\\&=\frac{24+24-32}{2\times8\times3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 余弦定理

- (円周角) $=\frac{1}{2}$(中心角) より

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos\angle\mathrm{BAC}=\cos\left(\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}\right)\\&=\sqrt{\frac{1+\cos\angle\mathrm{BOC}}{2}}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 半角の公式

ここで $\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ である.

$\longleftarrow |\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1$

また，$3\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=-2\overrightarrow{a}$ より

$$9|\overrightarrow{b}|^2+18\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+9|\overrightarrow{c}|^2=4|\overrightarrow{a}|^2$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\frac{4-9-9}{18}=-\frac{7}{9}$$
$$\therefore\quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{9}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$