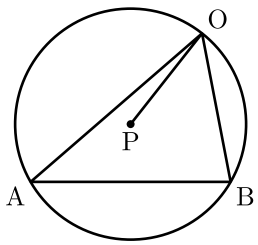
　$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ の三角形 OAB の外接円の中心を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{p}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}$ の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せ．




(13 工学院大 3)

(1) 3

(2) $\dfrac{9}{2}$

(3) $\overrightarrow{p}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{a}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{b}$

解答は次のページにあります．

# 【チェック・チェック】

$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ とおくことができます．誘導の $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値，さらに $\vec{b}\cdot\vec{p}$ の値も求めて $\alpha$，$\beta$ の値を求めましょう．

---

【解答】

(1) 与えられた条件より

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}\\ &= 3\times 2\times\cos 60^\circ\\ &= \mathbf{3} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(答)

$\longleftarrow$ 内積の定義

(2) P は △OAB の外心であり，辺 OA の垂直 2 等分線上にある．OA の中点を M とすると

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{p} &= |\vec{a}||\vec{p}|\cos\angle\mathrm{POA}\\ &= |\vec{a}|\times\frac{1}{2}|\vec{a}|\\ &= \frac{3^2}{2} = \mathbf{\frac{9}{2}} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(答)

$\longleftarrow |\vec{a}|\times(\vec{p}$ の $\vec{a}$ への正射影$)$

- OA ⊥ PM より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 0\\ &\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{p}\right) = 0\\ \therefore\ &\vec{a}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 垂直 $\iff$ (内積) $= 0$

- AP = OP であるから

$$\begin{aligned}&|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{p}|\\ &|\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{p} + |\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2\\ \therefore\ &\vec{a}\cdot\vec{p} = \frac{|\vec{a}|^2}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

(3) $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ とおくことができる．このとき

$$\vec{a}\cdot\vec{p} = \alpha|\vec{a}|^2 + \beta\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$\longleftarrow$ 1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて平面上のベクトルを表すことができる．

であり，①，②を代入すると

$$\frac{9}{2} = 9\alpha + 3\beta \qquad \therefore\ \ 6\alpha + 2\beta = 3 \quad \cdots\cdots ③$$

また，

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{p} &= \vec{b}\times\frac{|\vec{b}|}{2} = 2\\ \vec{b}\cdot\vec{p} &= \alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

より

$$3\alpha + 4\beta = 2 \quad \cdots\cdots ④$$

③，④を連立して

$$\alpha = \frac{4}{9},\ \beta = \frac{1}{6}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{p} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}}$$

$\cdots\cdots$(答)

$\longleftarrow$ チェクリピ (392)