$\triangle$ABC に対して，AB の中点を M，AC を $5:2$ に外分する点を N とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 線分 MN と BC の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を用いて表せ．

(2) 実数 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して

$$(7t-4)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(10-10t)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$$

をみたす点 P を考える．t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの点 P の軌跡を求めよ．

(13 愛知教大 後 2)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$

(2) 線分 MN

解答は次のページにあります．

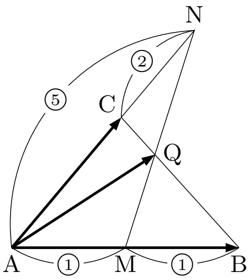
【チェック・チェック】

(1) は 2 直線の交点を扱った基本問題です.

(2) では動点 P を 1ヶ所に集めることを第 1 の操作としましょう.

【解答】

(1) Q は直線 MN 上の点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AM}}+s\overrightarrow{\mathrm{AN}} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$=(1-s)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+s\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1-s}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すことができる.

また, Q は直線 BC 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots\cdots ③$$

← Q は直線 MN と直線 BC の交点である.

と表すこともできる. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立であるから, ②, ③ より

← 2 通りの表現②, ③をつくる.

$$\begin{cases} \dfrac{1-s}{2}=1-t \\ \dfrac{5s}{3}=t \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t-s=1 \\ 3t-5s=0 \end{cases}$$

← 1 次独立による表現の一意性

$$\therefore \quad t=\frac{5}{7},\ s=\frac{3}{7}$$

s の値を①に代入して

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AN}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- ②において, Q は直線 BC 上の点でもあるので

$$\frac{1-s}{2}+\frac{5s}{3}=1 \qquad \therefore \quad (3-3s)+10s=6$$

$$\therefore \quad s=\frac{3}{7}$$

← Q が直線 BC 上の点であるための条件は (係数の和) $=1$

①に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

- メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QN}}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}=1 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QN}}=\frac{3}{4}$$

← $\dfrac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{QN}}\times\dfrac{\mathrm{NC}}{\mathrm{CA}}\times\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BM}}=1$

MQ : QN $=3:4$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AM}}+3\overrightarrow{\mathrm{AN}}}{7}$$

(2) 条件式

$$(7t-4)\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3t\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(10-10t)\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$$

の始点を A にそろえると

$$(7t-4)(-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3t(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(10-10t)(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$$

$$-6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(10-10t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{0}$$

←― 動点 P を 1ヶ所に集めた.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5(1-t)}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=t\overrightarrow{\mathrm{AM}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AN}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AN}}+t(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AN}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AN}}+t\overrightarrow{\mathrm{NM}}\end{aligned}$$

←― 点 N を通り，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ と平行な直線のベクトル方程式

t は $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くから，点 P の軌跡は**線分 MN**(両端も含む) である. ……(答)