平面上に 3 点 O, A, B があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ をみたしている．このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \boxed{\text{エ}}$ である．

また，実数 s, t が条件 $1 \leqq s + 3t \leqq 3$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ をみたしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められた点 P の存在する範囲の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(13 東京慈恵医大 1(2))

エ	オ
$\sqrt{3}$	$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

領域の図示と三角形の面積計算です．領域の図示は斜交座標系で考えましょう．

【解答】

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ であるから

$$\begin{cases}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1\\|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1\end{cases}$$

← 等式が 3 つあるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の 3 つの値は決まる．

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}1+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1\\4+4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0\\4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=-3\end{cases}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{3}{2},\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\underset{エ}{\boxed{\sqrt{3}}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

また

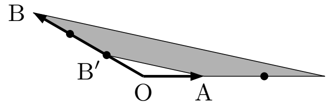
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3t\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$，$t'=3t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

かつ

$$s\geqq 0,\ t'\geqq 0,\ 1\leqq s+t'\leqq 3$$



← 斜交座標系を考える．チェクリピ (領域の図示)

点 P の存在範囲は右図の網目部分であるから，面積 S は

$$\begin{aligned}S&=3^2\times\triangle\mathrm{OAB'}-\triangle\mathrm{OAB'}\\&=8\triangle\mathrm{OAB'}\\&=8\times\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB'}})^2}\\&=8\times\sqrt{1^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\right)^2}\\&=4\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\\&=\underset{オ}{\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}}\qquad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

← 面積の公式