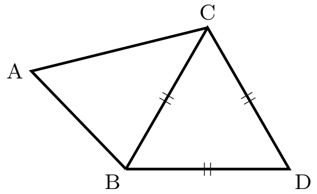
三角形 ABC は，3 辺の長さがそれぞれ $\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=\sqrt{13}$, $\mathrm{CA}=4$ である．辺 BC を共有する正三角形 CBD が三角形 ABC の外側にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．



(13 東邦大 医 13)

ホ	マ	ミ	ム
4	3	3	4

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

正三角形の頂点 D をどのように捉えるかで解法が決まります．すなわち

- D は $\mathrm{BD} = \mathrm{CD} = \mathrm{BC}(= \sqrt{13})$ を満たす点である
- D は BC の中点を通り，BC と垂直な直線上の点である

といった具合です．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．$\triangle\mathrm{BCD}$ は 1 辺の長さが $\sqrt{13}$ の正三角形であるから

$\longleftarrow$ 1 次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて平面上のベクトルを表すことができる．

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = \sqrt{13}$$

である．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |(\alpha-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 \\ &= (\alpha-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2(\alpha-1)\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \beta^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の値を求めたい．

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = \sqrt{13}$ より

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 13 \\ &16 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 9 = 13 \\ \therefore\quad &\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{25-13}{2} = 6\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = \sqrt{13} \\ \Longleftrightarrow\ &9(\alpha-1)^2 + 12(\alpha-1)\beta + 16\beta^2 = 13 \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

同じく，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (\beta-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = \sqrt{13} \\ \Longleftrightarrow\ &9\alpha^2 + 12\alpha(\beta-1) + 16(\beta-1)^2 = 13 \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ ①，②を連立することにより，α，β の値を求めることができる．

① − ② より

$$\begin{aligned}&(-18\alpha+9) + (-12\beta+12\alpha) + (32\beta-16) = 0 \\ &-6\alpha + 20\beta = 7 \\ &\alpha = \frac{10}{3}\beta - \frac{7}{6} \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

③を②に代入すると

$$\begin{aligned}&9\left(\frac{10}{3}\beta - \frac{7}{6}\right)^2 + 12\left(\frac{10}{3}\beta - \frac{7}{6}\right)(\beta-1) + 16(\beta-1)^2 = 13 \\ &\left(100\beta^2 - 70\beta + \frac{49}{4}\right) + 2(20\beta^2 - 27\beta + 7) \\ &\qquad + 16(\beta^2 - 2\beta + 1) = 13 \\ &156\beta^2 - 156\beta + \frac{117}{4} = 0 \\ &16\beta^2 - 16\beta + 3 = 0 \\ &(4\beta-1)(4\beta-3) = 0 \\ \therefore\quad &\beta = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\beta=\frac{1}{4}\text{のとき，}\ \alpha=\frac{10}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{7}{6}=-\frac{1}{3}$$
$$\beta=\frac{3}{4}\text{のとき，}\ \alpha=\frac{10}{3}\times\frac{3}{4}-\frac{7}{6}=\frac{4}{3}$$

正三角形 CBD は三角形 ABC の外側にあるから，$\alpha+\beta>1$ であり

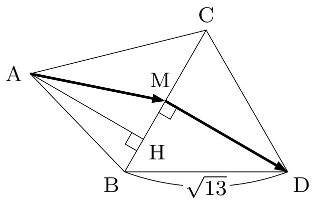
⟵ 点 D は直線 BC に関して A と反対側にある．

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{3}{4}\right)$$

である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\overset{\text{ホ}}{\boxed{\mathbf{4}}}}{\underset{\text{マ}}{\boxed{\mathbf{3}}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\overset{\text{ミ}}{\boxed{\mathbf{3}}}}{\underset{\text{ム}}{\boxed{\mathbf{4}}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- 辺 BC の中点を M，A から BC におろした垂線の足を H とすると，D は正三角形 BCD の頂点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{\sqrt{39}}{2}\frac{\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}$$

⟵ $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}$ は $\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ と平行な単位ベクトルである．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とおくことができて，$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

⟵ 垂直 $\Longleftrightarrow$ (内積) $=0$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$
$$t=-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{13}$$

$\mathrm{CA}=4$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=4^2$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=16$$
$$9-2\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+13=16$$
$$\therefore\ \ \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{9-3}{2}=3$$

これより $t=\dfrac{3}{13}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{13}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\times\frac{3}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\left(\frac{3}{13}\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$$
$$=9+2\times\frac{3}{13}\times(-3)+\frac{9}{13}$$
$$=\frac{108}{13}=\frac{6^2\times3}{13}$$

△ABH は直角三角形であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$$
$$=3^2-\left(\frac{3}{13}\sqrt{13}\right)^2$$
$$=\frac{9\times12}{13}\left(=\frac{6^2\times3}{13}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{\sqrt{39}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{AH}} \\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} + \frac{13}{12}\left\{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{13}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{12} - \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}
\end{aligned}$$