△ABC において，辺 AC を 3 : 2 に内分する点を D とし，線分 BD を 2 : 1 に内分する点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \boxed{\phantom{xx}}$ である．また，直線 AE と辺 BC との交点を F とするとき，比 BF : FC を求めると $\boxed{\phantom{xx}}$ である．

(13 福岡大 工・薬 4)

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ | 6 : 5 |

解答は次のページにあります.

# 【チェック・チェック】

2 直線の交点を扱った基本的な問題です．1 次独立の扱いに慣れましょう．

メネラウスの定理も使うと簡単に処理できることもあります．

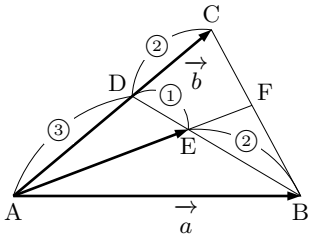
---

【解答】

与えれた条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\vec{b}\right) = \boxed{\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}}$$

……(答)




⟵ 分点公式

また，F は直線 AE 上の点であるから，実数 $k$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{2k}{5}\vec{b} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる．F は辺 BC 上の点であるから，実数 $t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表すこともできる．$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，②より

⟵ 2 通りの表現①，②をつくる．

$$\begin{cases} \dfrac{k}{3} = 1-t \\ \dfrac{2k}{5} = t \end{cases} \qquad \therefore \quad k = \frac{15}{11},\ t = \frac{6}{11}$$

⟵ 1 次独立による表現の一意性

よって，　$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = \dfrac{6}{11} : \left(1 - \dfrac{6}{11}\right) = \boxed{\boldsymbol{6:5}}$　……(答)

⟵ $\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = t : (1-t)$

- ①より

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2k}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

F は辺 BC 上の点でもあるから

$$\frac{k}{3} + \frac{2k}{5} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{15}{11}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{5}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b}$$

よって，$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 6 : 5$

⟵ F が直線 BC 上の点であるための条件は (係数の和) = 1

- メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = 1 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} = \frac{6}{5}$$

$\therefore$　$\mathrm{BF} : \mathrm{FC} = 6 : 5$

⟵ $\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \times \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AD}} \times \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EB}} = 1$