$t$ を正の定数とする．原点を O とする空間内に，2 点 A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$ がある．また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く．OP の最大値が 3 となるような $t$ の値を求めよ．

(13 一橋大 4)

---

【答】 $t=\dfrac{4}{3}$

---

【解答】

始点を O にそろえて式を整理すると

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3\\
&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=3\\
&3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\\
&3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=3\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\\
&\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}+1
\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2t\\2t\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2t\\2t\\t\end{pmatrix}$ であり

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}+1=\frac{(2t)^2+(2t)^2+t^2}{9}-0+1=t^2+1$$

P は $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$ の終点 G (これは △OAB の重心である) を中心とする半径 $\sqrt{t^2+1}$ の球面上を動く．OP が最大となるのは，O，G，P がこの順に 1 直線上にあるときであり，OP の最大値は $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|+(\text{半径})$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{(2t)^2+(2t)^2+t^2}=|t|=t\qquad(\because\ t>0)$$

よって，最大値が 3 となる $t$ の値は

$$t+\sqrt{t^2+1}=3\iff\begin{cases}t^2+1=(3-t)^2\\3-t\geqq 0\end{cases}\iff\begin{cases}6t=8\\t\leqq 3\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{t=\frac{4}{3}}\quad(\text{これは } t>0 \text{ を満たす})$$

……(答)