Oを原点とする座標平面に点 A$(2,\ 1)$ と点 B$(1,\ -2)$ をとる．実数 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ に対して点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1 - \sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たすものとする．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす値をとって変化するとき，点 P の軌跡を求めよ．

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

(13 同志社大 理工 2 月 10 日 2)

(1) 0

(2) 点 B$(1,\ -2)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円

(3) $5 + 5\sqrt{2}$，$\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

円のベクトル方程式の問題です.

係数が $\cos\theta$, $\sin\theta$ となるように式を変形しましょう.

成分計算で処理することもできますが，少々計算が伴います.

【解答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\times1+1\times(-2)=\mathbf{0}$$ ……(答)

⟵ 内積の成分計算

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を変形すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)(-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

⟵ 係数を $\cos\theta$, $\sin\theta$ とした.

であり，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 C をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{BC}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{BO}}$$

である．このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BO}} \text{ かつ } |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=\sqrt{5}$$

⟵ 基本ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ についての性質

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=5\cos^2\theta+5\sin^2\theta=5$$

であり，P は点 B を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円上を動く.

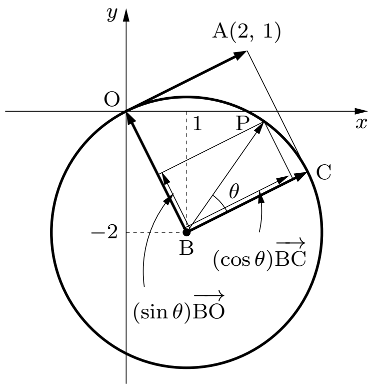
さらに，θ は

$$0\leqq\theta<2\pi$$

の範囲で変化するから，点 P の軌跡は

点 B(1, -2) を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円 ……(答)

である.



- P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos\theta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\sin\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\cos\theta - \sin\theta = x-1 \\ \cos\theta + 2\sin\theta = y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2x+y}{5} \\ \sin\theta = \dfrac{-x+2y+5}{5} \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

点 $(x,\ y)$ が点 P の軌跡上の点であるための条件は，①を満たす θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在することであるから

←― ここの言い回しが大切.

$$\left(\frac{2x+y}{5}\right)^2 + \left(\frac{-x+2y+5}{5}\right)^2 = 1$$

$$(2x+y)^2 + (-x+2y)^2 + 10(-x+2y) + 25 = 25$$

$$5x^2 + 5y^2 + 10(-x+2y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

よって，点 P の軌跡は，点 B$(1,\ -2)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円である.

- P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \cos\theta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\sin\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2\cos\theta - \sin\theta \\ -2 + 2\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5}\cos(\theta+\alpha) \\ -2 + \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

←― 三角関数の合成．x 成分は cos でまとめ，y 成分は sin でまとめる.

ただし，$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であり，$\alpha \leqq \theta + \alpha < \alpha + 2\pi$ である.

よって，点 P の軌跡は，点 B$(1,\ -2)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円である.

(3) 始点を B にとり直すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{BA}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}}) \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{BP}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} \qquad \cdots\cdots ② \\ &= 5 - \sqrt{10} \times \sqrt{5}\cos\angle\mathrm{ABP} \\ &\leqq 5 - 5\sqrt{2} \times (-1) \\ &= 5 + 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

←― 内積の定義

等号は $\angle\mathrm{ABP} = \pi$ すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$$

のとき成立する.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\boldsymbol{\theta = \dfrac{5}{4}\pi}$ のとき，最大値 $\mathbf{5 + 5\sqrt{2}}$ をとる.

……(答)

- ②以降を次のように処理することもできる．
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\
=&|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\
=&5-(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}})\cdot\left\{(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{BC}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{BO}}\right\}\\
=&5-5\sin\theta-5\cos\theta\\
=&5-5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 基本ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ で表す．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $5+5\sqrt{2}$ をとる．

- 成分計算してもよい．

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\
=&\begin{pmatrix}1+\sin\theta-2\cos\theta\\3-2\sin\theta-\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin\theta-2\cos\theta\\-2\sin\theta-\cos\theta\end{pmatrix}\\
=&(1+\sin\theta-2\cos\theta)(\sin\theta-2\cos\theta)\\
&\qquad+(3-2\sin\theta-\cos\theta)(-2\sin\theta-\cos\theta)\\
=&(\sin\theta-2\cos\theta)+(\sin\theta-2\cos\theta)^2\\
&\qquad+3(-2\sin\theta-\cos\theta)+(-2\sin\theta-\cos\theta)^2\\
=&5-5\sin\theta-5\cos\theta\\
=&5-5\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ ここから先はひたすら計算する．

$\longleftarrow$ 三角関数の合成

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $5+5\sqrt{2}$ をとる．