2 直線

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 6$$
$$x\sin\theta - y\cos\theta = 8$$

の交点を $\mathrm{P}(\theta)$ とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ を A とおくと A の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である．

(2) 点 $\mathrm{P}(\theta)$ の座標 $(x,\ y)$ を θ で表すと

$$x = \boxed{\text{オ}}\cos\theta + \boxed{\text{カ}}\sin\theta$$
$$y = \boxed{\text{キ}}\sin\theta - \boxed{\text{ク}}\cos\theta$$

である．

(3) θ が $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を動くとき，点 $\mathrm{P}(\theta)$ の軌跡は中心 $\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$，半径 $\boxed{\text{サシ}}$ の円の一部 (円弧) を動き，その円弧の長さは $\boxed{\text{ス}}\pi$ である．

(4) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ を B，点 $\mathrm{P}(\theta)$ を P とおく．このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積は

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boxed{\text{セソタ}}\left(\boxed{\text{チ}} - \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\sin\theta\right)$$

である．また，θ が $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を動くとき，この内積が最小となる点 P の座標は $\left(\boxed{\text{テ}},\ \boxed{\text{ト}}\right)$ である．

(13 東北薬大 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	ス	セソタ	チ	ツ
7	2	−	2	6	8	6	8	0	0	10	5	100	1	2

テ	ト
8	6

【チェック・チェック】

2 直線の交点の座標は 2 直線の方程式を連立することにより求まります.
それの (1) は具体例，(2) は一般化となっています.
(3) の軌跡では,「θ の存在条件を x，y で表す」,「$\cos\theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\sin\theta\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ は円のベクトル方程式」とみるという手もありますが，$\mathrm{P}(\theta)$ の x 座標を cos，y 座標を sin に合成するのがよいでしょう．x^2+y^2 を計算すれば原点を中心と円と分りますが，円弧の長さを求めるときに円周のどの部分になっているのかの説明が欠けます.
(4) では結果式に $\sin\theta$ が現れることに注意すると，合成した (3) の式ではなく (2) の式のままで内積計算することになります.

【解答】

$$x\cos\theta+y\sin\theta=6 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x\sin\theta-y\cos\theta=8 \quad \cdots\cdots ②$$

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，2 直線 ①，② の交点 A の座標は

$$\begin{cases} x+y=6\sqrt{2} & \cdots\cdots ①' \\ x-y=8\sqrt{2} & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

⟵ 交点 A は ①′，②′ の連立解である.

より　$\mathbf{A\left(7\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)}$ ……(答)

(2) ①，② を連立することにより，$\mathrm{P}(\theta)$ の座標は

$$\boldsymbol{(6\cos\theta+8\sin\theta,\ 6\sin\theta-8\cos\theta)} \quad \cdots\cdots(答)$$

⟵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ も使う.

(3) (2) より

$$x=10\left(\cos\theta\cdot\frac{6}{10}+\sin\theta\cdot\frac{8}{10}\right)=10\cos(\theta-\alpha)$$
$$y=10\left(\sin\theta\cdot\frac{6}{10}-\cos\theta\cdot\frac{8}{10}\right)=10\sin(\theta-\alpha)$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

⟵ 円を目指しているので，x 座標は cos，y 座標は sin に合成する.

であるから，点 $\mathrm{P}(\theta)$ の軌跡は,

中心 $\mathbf{(0,\ 0)}$，半径 **10** の円の一部 ……(答)

であり，θ は $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ を動くから，軌跡の円弧の長さは

$$\frac{1}{4}\times 2\pi\cdot 10=\mathbf{5}\pi \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

(4) B は $\mathrm{P}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ であり，B の座標は $\left(\sqrt{2},\ 7\sqrt{2}\right)$ である．

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\
=&(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\
=&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\\
=&0-\begin{pmatrix}8\sqrt{2}\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\cos\theta+8\sin\theta\\6\sin\theta-8\cos\theta\end{pmatrix}+10^2\\
=&\boldsymbol{100(1-\sqrt{2}\sin\theta)}
\end{aligned}
$$
……(答)

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は (2) の結果を利用する

また，θ は $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ を動くから，この内積は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小となり，このときの点 P の座標は

$$\mathbf{(8,\ 6)}$$
……(答)

である．