平面上の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が, $|\overrightarrow{a}|=1$, $|\overrightarrow{b}|=2$ を満たし, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が 60° のとき, $2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$ と $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすれば,

$$\cos\theta = \boxed{3}$$

である. また, 円のベクトル方程式

$$(\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=0$$

で定まる円の半径は, $\boxed{4}$ である.

(13 明治大 商 1(2))

3	**4**
$-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$	4

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

直径の両端が与えられた円のベクトル方程式にも慣れておきましょう.

【解答】

$$\cos\theta = \frac{(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a} + \hat{b})}{|2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}||2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|} \qquad \cdots\cdots ①$$

$\longleftarrow$ 右辺の値を求めたい.

$|\overrightarrow{a}| = 1,\ |\overrightarrow{b}| = 2,\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1\times 2\times\cos 60^\circ = 1$ だから

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}|^2 &= 4|\overrightarrow{a}|^2 - 12\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 9|\overrightarrow{b}|^2\\ &= 4\times 1^2 - 12\times 1 + 9\times 2^2 = 28\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}| = 2\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &= 4|\overrightarrow{a}|^2 + 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2\\ &= 4\times 1^2 + 4\times 1 + 2^2 = 12\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 2\sqrt{3}$$

また

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= 4|\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 3|\overrightarrow{b}|^2\\ &= 4\times 1^2 - 4\times 1 - 3\times 2^2\\ &= -12\end{aligned}$$

したがって, ① は

$$\cos\theta = \frac{-12}{2\sqrt{7}\times 2\sqrt{3}} = \underset{3}{\boxed{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{21}}{7}}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ とおき, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{p}$ とおくと, 与えられた方程式は

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 0\\ \Longleftrightarrow\ &(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{d}) = 0\\ \Longleftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} = 0\\ \Longleftrightarrow\ &\mathrm{P} = \mathrm{C} \text{ または } \mathrm{P} = \mathrm{D} \text{ または} \angle\mathrm{CPD} = 90^\circ\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 直径の両端が与えられた円のベクトル方程式
チェクリピ (393)

したがって, P は線分 CD を直径とする円周上の点である.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 &= |\overrightarrow{d} - \overrightarrow{c}|^2\\ &= |(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - (2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b})|^2\\ &= |4\overrightarrow{b}|^2\\ &= 64\end{aligned}$$

であるから, この円の半径は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}| = \frac{1}{2}\times 8 = \underset{4}{\boxed{\mathbf{4}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c})(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{d}) = 0$ を変形すると

$$|\overrightarrow{p}|^2 - (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}) \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{d} = 0$$

$$\left|\overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2}\right|^2 = \frac{|\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}|^2}{4} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{d}$$

$$\therefore \quad \left|\overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{2}\right|^2 = \frac{|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}|^2}{4}$$

← 中心と半径がわかるように式を変形する.

P は線分 CD の中点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}|$ の円周上の点である.

よって，半径は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}| = \frac{1}{2}|(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}) - (2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})|$$

$$= 2|\overrightarrow{b}| = 2 \times 2 = 4$$