$\mathrm{OA}=a,\ \mathrm{OB}=b,\ \mathrm{AB}=c$ である三角形 OAB の内心を P，外心を Q とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表されることを示せ．

(2) $a=4,\ b=5,\ c=6$ とし，P から辺 OB へ下ろした垂線を PH とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ の大きさを求めよ．

(3) $a=4,\ b=5,\ c=6$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさを求めよ．

(13 静岡大 後 工・情報 6)

(1) 略

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{30}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{16}{35}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

内心，外心の定義を確認しておきましょう．

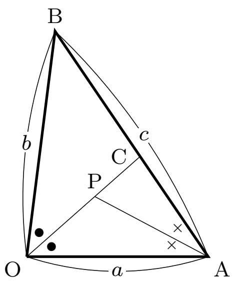
【解答】

(1) $\angle$AOB の二等分線と辺 AB の交点を C とすると ⟵ チェクリピ (373)

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=a:b$$

$$\therefore\quad \mathrm{AC}=\frac{a}{a+b}\times c=\frac{ac}{a+b}$$

⟵ 角の二等分線に関する性質



AP は $\angle$OAC の二等分線であるから

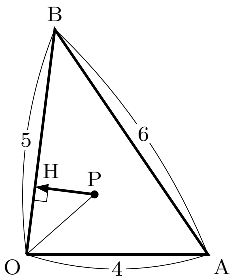
$$\begin{aligned}\mathrm{OP}:\mathrm{PC}&=\mathrm{AO}:\mathrm{AC}\\&=a:\frac{ac}{a+b}\\&=(a+b):c\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{a+b}{(a+b)+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{a+b}{a+b+c}\,\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}\\&=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

……(証明終わり)

(2) $a=4$，$b=5$，$c=6$ のとき，(1) より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{15}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (k は実数) とおくことができる．PH $\perp$ OB より

⟵ 垂直 $\iff$ (内積) $=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad k&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\\&=\frac{1}{25}\left(\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{15}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{20}{3}\right)\end{aligned}$$

⟵ 正射影ベクトルの公式として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

は覚えておくとよい．

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=6$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=36$$

$$25-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16=36$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{5}{2}$$

これより

$$k=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}+\frac{20}{3}\right)=\frac{3}{10}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{15}$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{30}}\overrightarrow{\mathbf{OB}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ の大きさは

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2 = \left(\frac{1}{30}\right)^2 |-10\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$= \frac{1}{900}\left(100 \times 16 - 2 \times 10 \times \frac{5}{2} + 25\right)$$

$$= \frac{1575}{900}$$

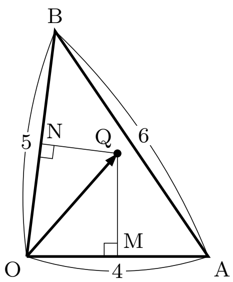
$$= \frac{7}{4}$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = \frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

⟵ 内接円の半径

(3) 辺 OA，OB の中点をそれぞれ M，N とおく．また，

⟵ チェクリピ (392)



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s,\ t\ は実数)$$

とおくことができる．$\overrightarrow{\mathrm{QM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{QM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

⟵ 垂直 $\Longleftrightarrow$ (内積) $= 0$

$$\left\{\left(\frac{1}{2} - s\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} - t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} - s\right) \times 16 - t \times \frac{5}{2} = 0$$

$$32s + 5t = 16 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{QN}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{QN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

⟵ 垂直 $\Longleftrightarrow$ (内積) $= 0$

$$\left\{-s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

$$-s \times \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2} - t\right) \times 25 = 0$$

$$s + 10t = 5 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より $\qquad s = \dfrac{3}{7},\ t = \dfrac{16}{35}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\overrightarrow{\mathbf{OA}} + \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{35}}\overrightarrow{\mathbf{OB}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさは

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \left(\frac{1}{35}\right)^2 |15\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 16\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$= \left(\frac{1}{35}\right)^2 \left(15^2 \times 16 + 2 \times 15 \times 16 \times \frac{5}{2} + 16^2 \times 25\right)$$

$$= \frac{5 \times 16}{35^2}(15 \times 3 + 15 + 16 \times 5)$$

$$= \frac{16}{7 \times 35} \times 140$$

$$= \frac{16 \times 28}{7^2}$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \frac{\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

⟵ 外接円の半径