原点を O とする座標空間に 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) がある．

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) A，B，C の定める平面を α とする．O から α に下ろした垂線と α との交点を H とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たすような実数 s，t の値を求めよ．また，H の座標を求めよ．

(3) 四面体 OABC に内接する球の半径 r を求めよ．

(13 南山大 情報理工 2)

(1) $\dfrac{7}{2}$

(2) $s = \dfrac{9}{49}$，$t = \dfrac{4}{49}$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{36}{49}, \dfrac{18}{49}, \dfrac{12}{49}\right)$

(3) $r = \dfrac{1}{3}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1)，(2) は教科書レベルの問題です.

(3) は，平面上の三角形の内接円の半径の求め方を真似てみましょう.

【解答】

(1) 3 点 A，B，C の座標より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるから，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1+4+0)(1+0+9)-(1+0+0)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{7}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

← 面積の公式

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp$ 平面 ABC より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \quad \cdots\cdots ① \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

である．

← $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC と垂直であるための条件

$$① \iff \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -1+5s+t=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

$$② \iff \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -1+s+10t=0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

①′，②′ より

$$\boldsymbol{s = \frac{9}{49}, \quad t = \frac{4}{49}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{9}{49}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{49}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}$$

よって，H の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 四面体 OABC に内接する球の中心を O′ とすると，四面体 OABC の体積は，四面体 O′OAB，O′OBC，O′OCA，O′ABC の体積の和である．

← 平面上の三角形の内接円の半径の求め方の類似である．

OA ⊥ OB，OB ⊥ OC，OC ⊥ OA より，△OAB，△OBC，

△OCA の面積はそれぞれ

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1,$$
$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3,$$
$$\triangle\mathrm{OCA} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

であり，(1) より △ABC の面積は $\frac{7}{2}$ であるから，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times 1 \times r + \frac{1}{3} \times 3 \times r + \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times r + \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times r$$
$$= \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}\right) r = 3r \qquad \cdots\cdots ③$$

一方，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC} = \frac{1}{3} \times 1 \times 3 = 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

であるから，③，④より

$$3r = 1$$

内接球の半径 r は

$$r = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots (答)$$

← 四面体 OABC の体積を 2 通りに求めた．これらは一致する．

- 四面体 OABC の体積④は (1)，(2) があるので

  $$\frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABC} \times \mathrm{OH}$$

  として求めることもできますが，解答のように計算する方が簡単です．

  (3) は (2) とは独立した問題とみるべきでしょう．