平行四辺形 ABCD を底面とする四角錐(すい) OABCD を考える．線分 OB の中点を B′，線分 OC を 1 : 2 に内分する点を C′ とし，A，B′，C′ を通る平面と直線 OD の交点を D′ とする．また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の何倍か．

(3) 三角錐 AOB′D′ の体積は，三角錐 AOBD の体積の何倍か．

(4) 四角錐 OAB′C′D′ の体積は，四角錐 OABCD の体積の何倍か．

(13 大阪教育大 3)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(2) $\dfrac{1}{2}$ 倍

(3) $\dfrac{1}{4}$ 倍

(4) $\dfrac{1}{6}$ 倍

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

体積比の問題です．(3) は (4) の誘導になっていて四角錐 OABD を平面 OBD で切断してそれぞれの体積を考えましょう．

【解答】

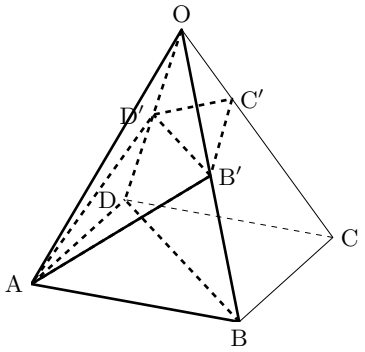
(1) 四角形 ABCD は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{\vec{a}} - \boldsymbol{\vec{b}} + \boldsymbol{\vec{c}}$$

……(答)



← 向かい合う 2 辺は平行かつ長さが等しい．

(2) D′ は直線 OD 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

(k は実数)

とおくことができる．(1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD'}} &= k(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= k\vec{a} - 2k\left(\frac{\vec{b}}{2}\right) + 3k\left(\frac{\vec{c}}{3}\right) \\ &= k\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2k\overrightarrow{\mathrm{OB'}} + 3k\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\end{aligned}$$

← D′ は直線 OD と平面 AB′C′ の交点である．

D′ は平面 AB′C′ 上の点でもあるから

$$k - 2k + 3k = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ 倍である．……(答)

(3) 2 つの三角錐 AOB′D′, AOBD の体積をそれぞれ V_1，V_2 とおく．点 A から平面 OBD に下ろした垂線の長さは，点 A から平面 OB′D′ に下ろした垂線の長さでもあるから

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\triangle\mathrm{OB'D'}}{\triangle\mathrm{OBD}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \triangle\mathrm{OBD}}{\triangle\mathrm{OBD}} = \frac{1}{4}$$

← 高さが共通な三角錐の体積比

よって，三角錐 AOB′D′ の体積は AOBD の体積の $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ 倍である．……(答)

(4) 2 つの三角錐 C′OB′D′，COBD の体積をそれぞれ V_3，V_4 とおく．

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times V_4}{V_4} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore \quad V_3 = \frac{1}{12}V_4$$

← 3 辺を縮小した三角錐の体積比

V_2 と V_4 は，底面をそれぞれ △ABD，△CBD とみると，底面積は等しく高さが共通なことから，四角錐 OABCD の体積を V とすると

$$V_2 = V_4 = \frac{1}{2}V$$

である．

$$
\begin{aligned}
&\text{四角錐 OAB}'\text{C}'\text{D}'\text{の体積}\\
=&V_1+V_3=\frac{1}{4}V_2+\frac{1}{12}V_4\\
=&\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)V_2=\frac{1}{3}V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}V\\
=&\frac{1}{6}V
\end{aligned}
$$

← 平面 OBD で立体を切る．

であるから

$$\frac{V_1+V_3}{V}=\frac{\frac{1}{6}V}{V}=\frac{1}{6}$$

よって，四角錐 OAB′C′D′ の体積は四角錐 OABCD の体積の $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ 倍である．……(答)