4 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ 2)$，$\mathrm{D}(2,\ 3,\ 1)$ を頂点とする三角錐 (四面体) ABCD がある．

(1) 三角形 BCD の面積を求めよ．
(2) 三角錐 ABCD の体積を求めよ．

(13 日本獣医生科大 2)

(1) $\sqrt{3}$
(2) $\dfrac{2}{3}$
解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

(1) ベクトルを用いた面積の公式を使います.

(2) (体積) $= \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD} \times$ (高さ) であり，A から平面 BCD に下した垂線の長さをどのように求めるかが問われています.

【解答】

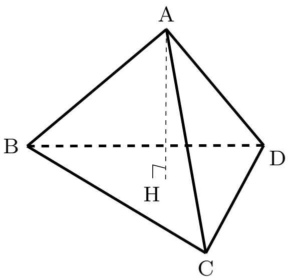
(1) 3 点 B，C，D の座標より，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから，三角形 BCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(1+4+1)(4+4+0) - (-2-4+0)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{6\times 8 - (-6)^2} = \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 面積の公式

……(答)

(2) 点 A から三角形 BCD に下ろした垂線の足を H とすると



$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}} \end{aligned}$$

とおくことができ

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 & \cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である.

$\longleftarrow$ AH $\perp$ (平面 BCD)

$\iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} ① &\iff (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \\ &\iff 6s - 6t - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② &\iff (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0 \\ &\iff -6s + 8t + 2 = 0 \qquad \cdots\cdots ②' \end{aligned}$$

①′，②′ より，$s = -\dfrac{1}{3}$，$t = -\dfrac{1}{2}$ だから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，三角錐 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

……(答)

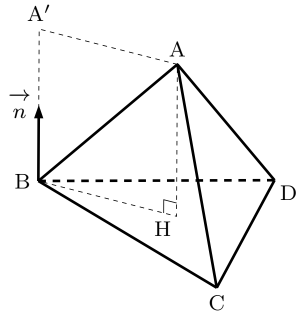
(体積)

$= \dfrac{1}{3}$(底面積)(高さ)

- 正射影ベクトルを利用して高さ $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|$ を求めることもできる．

←── $\overrightarrow{p}$ の $\overrightarrow{n}$ への正射影ベクトルは $\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルとして，$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}$ をとることができ，さらに，$\overrightarrow{n}$ が $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ にも垂直となるためには



$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 + k = 0$$

$$\therefore \quad k = -1$$

である．

A から，B を通り $\overrightarrow{n}$ と平行な直線に下ろした垂線の足を A′ とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BA'}}| = \left| \frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} \right|$$

←── $\overrightarrow{\mathrm{BA'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ の $\overrightarrow{n}$ への正射影ベクトル

$$= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \frac{|2-3-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

←── H の座標を求めずに $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|$ を求めることができた．

よって，三角錐 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$