点 A(1, 0, 1) を通り，ベクトル $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1)$ に垂直な平面 α を考える．

(1) 平面 α 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ に関して $2x + y - z = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 平面 α に関して点 B(3, 2, 1) と対称な点 C の座標を求めよ．

(3) 点 B と点 Q(1, 4, 5) と平面 α 上の点 R が正三角形の 3 頂点となるとき，点 R の座標を求めよ．

(13 津田塾大 情報科学 3)

(1) 略

(2) C(−1, 0, 3)

(3) R $\left(\dfrac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{6 \pm 4\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{9 \pm 4\sqrt{3}}{3}\right)$ (複号同順)

解答は次のページにあります．

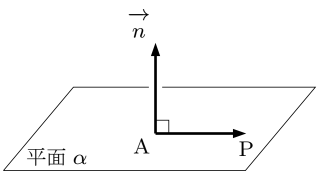
【チェック・チェック】

(1) は通過点と法線ベクトルが与えらたときの平面の方程式です.

(2), (3) は独立した問題ですね. (2) は頻出タイプの問題です. (3) はひたすら計算することになるでしょう.

【解答】

(1) P は平面 α 上の点であるから



$$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} \text{ または } \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$$

$$\therefore \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

である. ⟵ 平面の定義式

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2(x-1) + y - (z-1) = 0$$

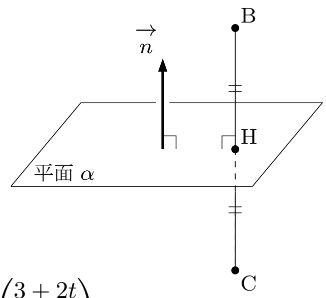
$$\therefore \quad 2x + y - z = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

……(証明終わり) ⟵ 平面の方程式

(2) B(3, 2, 1) から平面 α に下ろした垂線の足を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

⟵ C は平面 α に関する B の対称点である.



である. また, $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \mathbin{/\!/} \vec{n}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = t\vec{n}$ (t は実数) とおくことができ

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2+t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

である. H は①を満たすから

$$2(3+2t) + (2+t) - (1-t) = 1$$

$$7 + 6t = 1 \qquad \therefore \quad t = -1$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{BH}} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

点 C の座標は **$(-1,\ 0,\ 3)$** ……(答)

(3) $\triangle$BQR は正三角形であるから

$$\mathrm{BQ} = \mathrm{QR} = \mathrm{RB}$$

を満たす．R$(x,\ y,\ z)$ とおくと，R は平面 α 上の点だから，①すなわち

$$2x + y - z = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす．また

$$\mathrm{BQ}^2 = (1-3)^2 + (4-2)^2 + (5-1)^2 = 24$$

だから

$$\mathrm{QR}^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 24 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\mathrm{RB}^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 24 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．② − ③ から

← ①かつ②かつ③の連立方程式を解く．

$$(4x-8) + (-4y+12) + (-8z+24) = 0$$

$$x - y - 2z = -7 \qquad \cdots\cdots ④$$

①かつ④から

$$\begin{cases} y - z = 1 - 2x \\ y + 2z = 7 + x \end{cases}$$

$$\therefore \quad y = 3 - x, \quad z = 2 + x$$

← 1 つの文字で他の 2 つを表す．

② に代入して

$$(x-1)^2 + (-x-1)^2 + (x-3)^2 = 24$$

$$3x^2 - 6x - 13 = 0$$

したがって

$$x = \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3}$$

$$y = 3 - \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3} = \frac{6 \mp 4\sqrt{3}}{3}$$

$$z = 2 + \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3} = \frac{9 \pm 4\sqrt{3}}{3}$$

よって，R の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3}},\ \boldsymbol{\frac{6 \mp 4\sqrt{3}}{3}},\ \boldsymbol{\frac{9 \pm 4\sqrt{3}}{3}} \right)$$ **(複号同順)**

……(答)