空間において，2 点 A(0, 1, 0)，B(-1, 0, 0) を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1, -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3) R, S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\overrightarrow{v} = (a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\overrightarrow{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

(13 神戸大 理 1 文 1)

【答】

(1) $\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ 0)$

(3) $\mathrm{T}\left(\dfrac{a}{b-a},\ \dfrac{b}{b-a},\ 0\right)$，$\mathrm{U}\left(0,\ 0,\ \dfrac{c}{a-b}\right)$

【チェック・チェック】

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

平行になるための条件は，$\vec{a} = k\vec{b}$ を満たす実数 k が存在することであり，

垂直になるための条件は，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

が成り立つことです．

【解答】

(1) 点 P は ℓ 上，点 Q は z 軸上にあるから，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を O とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,\ 1,\ 0) + p(-1,\ -1,\ 0)\\ &= (-p,\ 1-p,\ 0),\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= q(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 0,\ q)\end{aligned}$$

⟵ 点 P が直線 AB 上にあるための条件

と表せる．ここで，p，q は実数である．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ p-1,\ q)$$

⟵ ベクトルの差

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1, -1)$ と平行になる条件は

$$(p,\ p-1,\ q) = k(3,\ 1,\ -1)$$

⟵ チ&リ (平行条件)，wikipedia も参照しましょう．

を満たす実数 k が存在することである．

$$\begin{cases} p = 3k \\ p - 1 = k \\ q = -k \end{cases} \iff \begin{cases} p = 3k \\ 3k - 1 = k \\ q = -k \end{cases}$$

⟵ 代入法の原理

$$\therefore \quad k = \frac{1}{2},\ p = \frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{2}$$

よって，P と Q の座標は

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right),\quad \mathbf{Q}\left(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 点 R は ℓ 上に，点 S は z 軸上にあるから，(1) と同じく，実数 r，s を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (-r,\ 1-r,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = (0,\ 0,\ s)$$

と表せるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = (r,\ r-1,\ s)$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になる条件は

⟵ チ&リ (ベクトルの垂直・平行)，wikipedia も参照しましょう．

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot (0,\ 0,\ 1) = 0 \end{cases}$$

である．これより

$$\begin{cases}(r,\ r-1,\ s)\cdot(-1,\ -1,\ 0)=0\\(r,\ r-1,\ s)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-r-(r-1)=0\\s=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{2},\quad s=0$$

よって，R と S の座標は

$$\mathbf{R}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right),\quad \mathbf{S(0,\ 0,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) R, S を (2) で求めた点とする．点 T は ℓ 上に，点 U は z 軸上にあるから，(1) と同じく，実数 $t,\ u$ を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(-t,\ 1-t,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{OU}}=(0,\ 0,\ u)$$

と表せるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$$

である．また，零ベクトルでない $\overrightarrow{v}=(a,\ b,\ c)$ は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$ に垂直ではないから

←― 垂直および平行という概念は $\overrightarrow{0}$ でないベクトルに対して行われるものである．

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}\neq 0$$

$$(a,\ b,\ c)\cdot\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)\neq 0$$

$$\frac{a-b}{2}\neq 0 \qquad \therefore\quad a-b\neq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\overrightarrow{v}$ と平行になる条件は

$$(t,\ t-1,\ u)=m(a,\ b,\ c)$$

を満たす実数 m が存在することである．

$$\begin{cases}t=ma\\t-1=mb\\u=mc\end{cases}\iff\begin{cases}t=ma\\m(a-b)=1\\u=mc\end{cases}$$

←― 代入法の原理

① より

$$m=\frac{1}{a-b},\ t=\frac{a}{a-b},\ u=\frac{c}{a-b}$$

よって，T と U の座標は

$$\mathbf{T}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b-a}},\ \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b-a}},\ \mathbf{0}\right),\quad \mathbf{U}\left(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a-b}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$