空間内に 3 点 A(5, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(3, 6, 0) がある．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を P(x, y, z) とおくとき，$2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を成分で表せ．

(2) 点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，点 P は，ある球面上にあることを示せ．また，その球面の中心 Q の座標と半径 r を求めよ．

(3) △ABC の面積 S を求めよ．

(4) 点 P が (2) で求めた球面上を動くとき，四面体 PABC の体積 V の最大値を求めよ．ただし，4 点 P, A, B, C が同一平面上にあるときは $V=0$ とする．

(13 関西学院大 理工 2 月 3 日 3)

(1) $(3x-3,\ 3y-12,\ 3z)$

(2) Q(3, 2, 0), $r=2\sqrt{2}$

(3) $S=12$

(4) $8\sqrt{2}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

誘導にのりながら手を進めていきましょう．

(2) 中心 $(a,\ b,\ c)$，半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

です．与えられた条件式をこの形に整理しましょう．

(4) では，(3) の結果を使いたいので，三角形 ABC を底面とし，P から平面 ABC に下ろした垂線の長さを高さとします．P がどの位置にあると高さが最大となるかを考えましょう．

【解答】

(1) B(0, 3, 0)，C(3, 6, 0)，P$(x,\ y,\ z)$ より

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}&=2(x,\ y-3,\ z)+(x-3,\ y-6,\ z)\\&=\boldsymbol{(3x-3,\ 3y-12,\ 3z)}\end{aligned}$$ ……(答)

(2) A(5, 0, 0) より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-5,\ y,\ z)$ であり，(1) より

$$2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3(x-1,\ y-4,\ z)$$

であるから，点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たすとき

$$(x-5)(x-1)+y(y-4)+z^2=0$$ ⟵ 内積の成分計算

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+5=0$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=8$$ ⟵ 球面の方程式

よって，点 P は

中心 Q(3, 2, 0)，半径 $r=2\sqrt{2}$ の球面上にある． ……(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-5,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 6,\ 0)$ だから，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|(-5)\times6-3\times(-2)|=\boldsymbol{12}$$ ……(答)

⟵ 3 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ がつくる三角形の面積は $\frac{1}{2}|ad-bc|$ である．

- $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ を計算してもよいが，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の z 成分ともに 0 であることに着目すると，△ABC は xy 平面上の三角形であり，上のようにすれば幾分計算を減らすことができる．

(4) △ABC は xy 平面上にあり，球面の中心 Q も xy 平面上にある．したがって，点 P が (2) の球面上を動くとき，四面体 PABC の体積 V が最大になるのは，点 P と xy 平面との距離が最大のとき，すなわち，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ が xy 平面と垂直なときである．

⟵ P から平面 ABC に下ろした垂線の長さが最大のとき体積は最大となる．

このとき点 Q の座標は $(3,\ 2,\ \pm r)$ であり，V の最大値は

$$\frac{1}{3}Sr=\frac{1}{3}\times12\times2\sqrt{2}=\boldsymbol{8\sqrt{2}}$$ ……(答)