後期：理　学　部

1　2次の正方行列 A, B, C を次のように定める。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},\ C=BAB^{-1}$$

(1)　C を求めよ。

(2)　$C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を満たす点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(3)　点 $(x,\ y)$ が直線 $x=1$ 上を動くとき，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

によって定まる点 $(x',\ y')$ の軌跡の方程式を求めよ。

2　a を実数とし，空間に5点

$$\mathrm{A}(6,0,0),\ \mathrm{B}(0,6,0),\ \mathrm{C}(0,0,3),$$
$$\mathrm{P}(2a,0,2a+1),\ \mathrm{Q}(0,2a,2a-1)$$

をとる。

(1)　線分PQが三角形ABCの辺または内部と共有点をもつ a の範囲を求めよ。

(2)　(1)の共有点と原点との距離の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

3 n を自然数とする。次の連立不等式が表す xy 平面の領域を D_n とする。

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 3n \\ 0 \leqq 3y \leqq 2x + 3 \end{cases}$$

D_n に含まれ，x 座標，y 座標ともに整数である点 $(x,\ y)$ の個数を a_n とする。

(1) a_1 を求めよ。

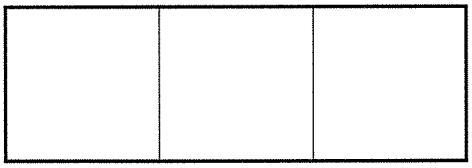
(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) D_n の面積を S_n とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{S_n} - 1\right)$$

4 縦横の長さの比が 1 ： 3 の長方形の板がある。この板を両面とも下図のように線で区切り，できた 6 つの正方形のそれぞれに赤または白の色を塗ることにする。塗り終えた板において回転や裏返しで同じ塗り方になるものは区別しないとするとき，塗り方は何通りあるか求めよ。ただし，各正方形には 1 つの色を塗るものとする。



5 a を実数とする。xy 平面上の 2 つの曲線 $C_1 : y = x^3$ と $C_2 : y = 2x^2 - ax$ を考える。

(1) 2 曲線 C_1, C_2 が異なる 3 つの交点をもつための a の条件を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1, C_2 が異なる 3 つの交点をもち，C_1 と C_2 で囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

6 直線 l : $2x - \sqrt{3}y = 0$ と，媒介変数で表された曲線

$$C : x = \tan t,\ y = \frac{1}{\cos t} \quad \left(0 \leqq t < \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) l と C の交点の座標を求めよ。

(2) l と C および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。