$x = t + \dfrac{1}{3t}$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする．

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

【答】

(1) $x \geqq \dfrac{7}{6}$

(2) 略

【解答】

(1) $x = t + \dfrac{1}{3t}$ $\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{3t^2} = \frac{3t^2 - 1}{3t^2} < 0$$

であり，x は単調減少である．

$$\lim_{t \to +0} x = \infty, \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } x = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

よって，x のとり得る値の範囲は $\boldsymbol{x \geqq \dfrac{7}{6}}$ である．　……(答)

- $t \neq 0$ より

$$x = t + \frac{1}{3t} \iff 3t^2 - 3xt + 1 = 0$$

であるから，$g(t) = 3t^2 - 3xt + 1$ とおき，t についての 2 次方程式 $g(t) = 0$ が $0 < t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲で少なくと 1 つの解をもつための x の条件を求めてもよい (x は正の実数であることに注意)．こうすれば数学 III を避けてこの問題を解くことができる．

(2) $f(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{4}$ とおく．

$f(x) = 0$ が $x \geqq \dfrac{7}{6}$ の範囲で少なくとも 1 つ解をもつ …… $(*)$

ための条件は，軸 $x = -\dfrac{a}{2}$ が定義域 $x \geqq \dfrac{7}{6}$ 内にあるか否かで場合分けすると

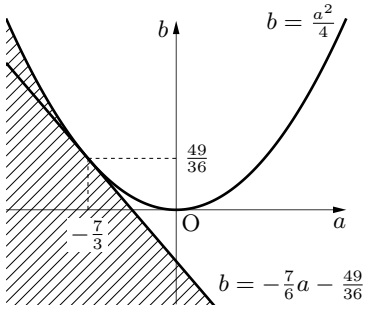
(i) $-\dfrac{a}{2} < \dfrac{7}{6}$ $\left(-\dfrac{7}{3} < a\right)$ のとき

$$(*) \iff f\left(\frac{7}{6}\right) \leqq 0$$

$$\frac{49}{36} + \frac{7}{6}a + b \leqq 0 \qquad \therefore \quad b \leqq -\frac{7}{6}a - \frac{49}{36}$$

(ii) $-\dfrac{a}{2} \geqq \dfrac{7}{6}$ $\left(a \leqq -\dfrac{7}{3}\right)$ のとき

$$(*) \iff f\left(-\frac{a}{2}\right) \leqq 0 \qquad \therefore \quad b \leqq \frac{a^2}{4}$$



以上，(i)，(ii) より点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図の斜線部分となる．境界も含む．

- 端点の y 座標の符号で場合分けしてもよい．

(i) $f\left(\dfrac{7}{6}\right)=b+\dfrac{7}{6}a+\dfrac{49}{36}\leqq 0$ のとき，$(*)$ を満たす．

(ii) $f\left(\dfrac{7}{6}\right)=b+\dfrac{7}{6}a+\dfrac{49}{36}>0$ のとき

$$(*) \iff \begin{cases} \text{軸の位置}: x=-\dfrac{a}{2}>\dfrac{7}{6} \\ \text{頂点の } y \text{ 座標}: f\left(-\dfrac{a}{2}\right)\leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a<-\frac{7}{3} \text{ かつ } b\leqq \frac{a^2}{4}$$

これにより，解答と同じ図を得る．