次の問に答えなさい．

(1) 2 つの解 $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=\sqrt{3}$ をもつ 2 次方程式を一つ求めなさい．

(2) ある 2 次方程式 $f(x)=0$ の解の 1 つが $\alpha=s+t\sqrt{2}$ であった．このとき，もう一つの解 β に関する次の議論は正しくないことを説明しなさい．

$\alpha=s+t\sqrt{2}$ から簡単な計算により，$\alpha^2-2s\alpha+s^2-2t^2=0$ を得る．これは，α が $x^2-2sx+s^2-2t^2=0$ の解であることを意味することから，$f(x)=x^2-2sx+s^2-2t^2$ がわかる．よって，$f(x)=0$ のもう一つの解 β は $x^2-2sx+s^2-2t^2=0$ を解いて $\beta=s-t\sqrt{2}$ と求まる．

(3) 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ において，p，q は有理数とする $\alpha=1+\sqrt{2}$ がこの方程式の解であるとき，もう一方の解 β を求めなさい．

(15 兵庫県大 経済・経営 1)

【答】

(1) $(x-1-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$
(2) 略
(3) $\beta=1-\sqrt{2}$

【解答】

(1) $\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=\sqrt{3}$ を解にもつ 2 次方程式を一つは

$$(x-1-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$$
$$\boldsymbol{x^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{3}+\sqrt{6}=0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{3}$ より
$$\alpha+\beta=1+\sqrt{2}+\sqrt{3},$$
$$\alpha\beta=(1+\sqrt{2})\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{6}$$
であるから，求める 2 次方程式の一つは
$$x^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{3}+\sqrt{6}=0$$
- この他にも
$$k\{x^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{3}+\sqrt{6}\}=0 \ (k \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$
は条件を満たす 2 次方程式である．

(2) $x^2-2sx+s^2-2t^2=(x-s-t\sqrt{2})(x-s+t\sqrt{2})$ であるから，$\alpha=s+t\sqrt{2}$ は $x^2-2sx+s^2-2t^2=0$ の解であるが，解の 1 つが α である 2 次方程式 $f(x)=0$ に対して $f(x)=x^2-2sx+s^2-2t^2$ と限定されるものではないから，この議論は正しくない．

(1) と同じように考えると，α と任意の数 β に対して $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とすると，$f(x)=0$ は α, β を解とする 2 次方程式であり，$f(x)$ は無数に存在する．

(3) $\alpha = 1+\sqrt{2}$ が $x^2+px+q=0$ の解であるから

$$(1+\sqrt{2})^2+p(1+\sqrt{2})+q=0$$

$$3+p+q+(2+p)\sqrt{2}=0$$

$2+p \fallingdotseq 0$ とすると，$\sqrt{2} = -\dfrac{3+p+q}{2+p}$ となり，左辺は無理数，右辺は有理数であり，不合理．したがって，$2+p=0$ である．このとき $3+p+q+0\cdot\sqrt{2}=0$ であり，$3+p+q=0$ でもある．

$$\begin{cases} 2+p=0 \\ 3+p+q=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad p=-2,\ q=-1$$

与えられた 2 次方程式は $x^2-2x-1=0$ であり，解は $x=1\pm\sqrt{2}$ である．
よって，もう一つの解 β は $\boldsymbol{\beta = 1-\sqrt{2}}$ である． ……(答)

- (2) の議論は $\alpha = s+t\sqrt{2}$ ($s,\ t$ が有理数で $t \fallingdotseq 0$) が有理数係数の 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解ならば成り立つ．すなわち，もう一つの解 β は $\beta = s-t\sqrt{2}$ である．
  一般化した形でこれを証明しておく．
  有理数係数の多項式 $f(x)$ について，$\alpha = s+t\sqrt{2}$ ($s,\ t$ は有理数で $t \fallingdotseq 0$) が $f(x)=0$ の解であるとする．
  $f(x)$ を $\{x-(s+t\sqrt{2})\}\{x-(s-t\sqrt{2})\}$ で割った商を $Q(x)$，余りを $rx+s$ とすると
  $$f(x) = \{x-(s+t\sqrt{2})\}\{x-(s-t\sqrt{2})\}Q(x)+rx+s$$
  ここで，$f(x)$ と $\{x-(s+t\sqrt{2})\}\{x-(s-t\sqrt{2})\} = x^2-2sx+s^2-2t^2$ が有理数係数であることより，$r,\ s$ は有理数である．$f(\alpha)=0$ より
  $$r\alpha+s=0$$
  であり，r と s は有理数，$\alpha = s+t\sqrt{2}$ ($t \fallingdotseq 0$) は無理数であるから
  $$r=s=0$$
  よって，$f(x) = \{x-(s+t\sqrt{2})\}\{x-(s-t\sqrt{2})\}Q(x)$ であり，$s-t\sqrt{2}$ も $f(x)=0$ の解である．
- 「$f(x)$ を実数係数の多項式とするとき，複素数 z が解ならば，共役な複素数 $\overline{z}$ も解である」という定理とよく似ている．証明も同じようにできる．
  $\alpha = s+t\sqrt{2}$ ($s,\ t$ は有理数) に対して $\overline{\alpha} = s-t\sqrt{2}$ と表すことにすると
  $$\overline{\alpha_1+\alpha_2} = \overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2} \qquad \cdots\cdots ①$$
  $$\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2} = \overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2} \qquad \cdots\cdots ②$$
  $$\overline{s} = s \qquad \cdots\cdots ③$$
  が成り立つから，$f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ($a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$は有理数) のとき
  $$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) &= a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0} \qquad (\because ③) \\ &= \overline{a_n\alpha^n}+\overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1\alpha}+\overline{a_0} \qquad (\because ②) \\ &= \overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0} \qquad (\because ②) \\ &= \overline{f(\alpha)} \end{aligned}$$
  であり，$f(\alpha)=0$ ならば $f(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0 \qquad \therefore \quad f(\overline{\alpha})=0$